**ThS. LÊ HOÀNH PHÒ**

*Nhà giáo ưu tú*

MỚI

# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

# HÌNH HỌC 12

- Dành cho HS lớp 12 ôn tập & nâng cao kĩ năng làm bài
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

## Cùng một tác giả

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN
ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH
12
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN
ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH
12

- Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Đại số 10-1.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Đại số 10-2.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Hình học 10.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Đại số 11.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Hình học 11.
- Bộ đề thi tự luận Toán học.
- Phân dạng và phương pháp giải Toán Số phức.
- Phân dạng và phương pháp giải Toán Tổ hợp và Xác suất.
- 1234 Bài tập tự luận điển hình Đại số - giải tích
- 1234 Bài tập tự luận điển hình Hình học lượng giác

**ThS. LÊ HOÀNH PHÒ**
*Nhà giáo ưu tú*

MỚI

# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN
# HÌNH HỌC 12

- Dành cho HS lớp 12 ôn tập & nâng cao kĩ năng làm bài.
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

# LỜI NÓI ĐẦU

*Để giúp cho học sinh lớp 12 có thêm tài liệu tự bồi dưỡng, nâng cao và rèn luyện kĩ năng giải toán theo chương trình phân ban mới. Trung tâm sách giáo dục ANPHA xin trân trọng giới thiệu quý bạn đồng nghiệp và các em học sinh cuốn: "Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 12" này.*

*Cuốn sách này nằm trong bộ sách 6 cuốn gồm:*

*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 10.*
*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số 10.*
*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 11.*
*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số - Giải tích 11.*
*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 12.*
*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Giải tích 12.*

*do nhà giáo ưu tú, Thạc sĩ Lê Hoành Phò tổ chức biên soạn. Nội dung sách được biên soạn theo chương trình phân ban: cơ bản và nâng cao mới của Bộ GD & ĐT, trong đó một số vấn đề được mở rộng với các dạng bài tập hay và khó để phục vụ cho các em yêu thích muốn nâng cao toán học, có điều kiện phát triển tốt nhất khả năng của mình. Cuốn sách là sự kế thừa những hiểu biết chuyên môn và kinh nghiệm giảng dạy của chính tác giả trong quá trình trực tiếp đứng lớp bồi dưỡng cho học sinh giỏi các lớp chuyên toán.*

*Với một nội dung súc tích, tác giả đã cố gắng sắp xếp, chọn lọc các bài toán tiêu biểu cho từng thể loại khác nhau ứng với nội dung của SGK. Một số bài tập có thể khó nhưng cách giải được dựa trên nền tảng kiến thức và kĩ năng cơ bản. Học sinh cần tự mình hoàn thiện các kĩ năng cũng như phát triển tư duy qua việc giải câu bài tập có trong sách trước khi đối chiếu với lời giải có trong sách này, có thể một số lời giải có trong sách còn cô đọng, học sinh có thể tự mình làm rõ hơn, chi tiết hơn, cũng như tự mình đưa ra những cách lập luận mới hơn.*

*Chúng tôi hy vọng bộ sách này sẽ là một tài liệu thiết thực, bổ ích cho người dạy và học, đặc biệt các em học sinh yêu thích môn toán và học sinh chuẩn bị cho các kỳ thi quốc gia do Bộ GD & ĐT tổ chức sắp tới.*

*Trong quá trình biên soạn, cuốn sách này không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được góp ý của bạn đọc gần xa để bộ sách hoàn thiện hơn trong lần tái bản.*

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:
- **Trung tâm sách giáo dục Anpha**
225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.
- **Công ti sách - thiết bị giáo dục Anpha**
50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, Tp. HCM.
ĐT: 08. 62676463, 38547464.
Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin chân thành cám ơn!

***Tác giả***

# Chương I: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH

## §1. KHỐI ĐA DIỆN VÀ PHÉP BIẾN HÌNH

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hình đa diện gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện:

(1) Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

(2) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Hình đa diện chia không gian làm hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài. Hình đa diện cùng với phần bên trong của nó gọi là khối đa diện.

Mỗi khối đa diện có thể phân chia được thành những khối tứ diện.

Phép dời hình trong không gian là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, đối xứng tâm, phép đối xứng qua mặt phẳng là những phép dời hình.

Hai hình đa diện gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

- Phép vị tự tâm O tỉ số $k \neq 0$ là phép biến hình mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{OM}' = k\overline{OM}$.

Hình H được gọi là đồng dạng với hình H' nếu có một phép vị tự biến hình H thành $H_1$ mà hình $H_1$ bằng hình H'.

- Một khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn thẳng AB cũng thuộc khối đó.

Khối đa diện đều gọi là khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

(1) Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh;

(2) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.

- Có năm loại khối đa diện đều: khối tứ diện đều, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

### B. PHÂN DẠNG TOÁN

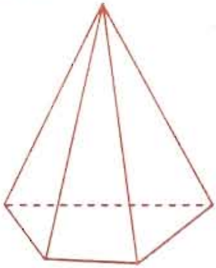
#### DẠNG 1: KHỐI ĐA DIỆN

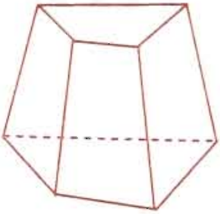
- Hình H cùng với các điểm nằm trong H được gọi là khối đa diện giới hạn bởi hình H.

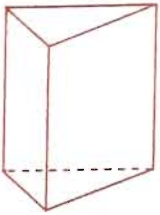
Mỗi đa giác của hình H được gọi là một mặt của khối đa diện. Các đỉnh, các cạnh của mỗi mặt còn gọi là đỉnh, cạnh của khối đa diện. Các điểm nằm trong hình H còn gọi là điểm trong của khối đa diện.

- Khối đa diện được gọi là khối chóp, khối chóp cụt nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp, hình chóp cụt. Tương tự cho khối chóp n-giác, khối chóp cụt n-giác, khối chóp đều, khối tứ diện,...

- Khối đa diện được gọi là khối lăng trụ nếu nó được giới hạn bởi một hình lăng trụ, tương tự cho khối hộp, khối hộp chữ nhật, khối lập phương...







- Phân chia và lắp ghép các khối đa diện: Mọi khối chóp và khối lăng trụ luôn có thể phân chia được thành những khối tứ diện bằng nhiều cách khác nhau.

Chú ý: Đặc số Ơ-le của khối đa diện lồi:

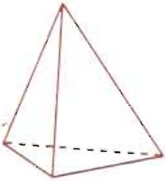
Đối với mỗi khối đa diện lồi H, ta kí hiệu Đ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt của H thì số $\chi(H) = Đ - C + M = 2$.

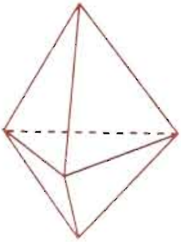
**Ví dụ 1**: Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.

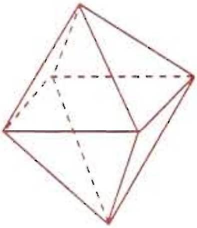
**Giải**

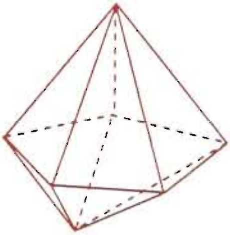
Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số mặt là M. Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên 3M = 2C. Suy ra M là số chẵn.

Sau đây là một số khối đa diện có số các mặt tam giác là 4, 6, 8, 10.









**Ví dụ 2**: Chứng minh rằng mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh và là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

**Giải**

Ta dùng phản chứng. Nếu xuất phát từ một đỉnh nào đó chỉ có hai cạnh, thì mỗi cạnh như thế là cạnh của chỉ một đa giác, trái với điều kiện trong định nghĩa của hình đa diện.

Vậy mỗi đỉnh phải là đỉnh chung của ít nhất là ba cạnh, và vì vậy nó cũng phải là đỉnh chung của ba mặt.

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

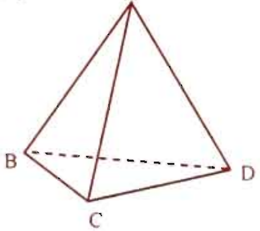
**Giải**

Giả sử khối đa diện có C cạnh và có Đ đỉnh. Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh có hai đỉnh nên 3Đ = 2C. Vậy Đ phải là số chẵn.

**Ví dụ 4:** Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện.

**Giải**

Gọi A là một đỉnh của khối đa diện. Theo giả thiết, đỉnh A là đỉnh chung cho ba cạnh, ta gọi ba cạnh đó là AB, AC, AD. Cạnh AB phải là cạnh chung của hai mặt tam giác, đó là hai mặt ABC và ADB (vì qua đỉnh A chỉ có 3 cạnh).



Tương tự, ta có các mặt tam giác ACD và BCD. Vậy khối đa diện đó chính là khối tứ diện ABCD.

**Ví dụ 5**: Chứng minh rằng, số góc của tất cả các mặt gấp đôi số cạnh của khối đa diện. Suy ra số góc chẵn.

**Giải**

Gọi số góc là G và số cạnh của khối đa diện là C. Trong mỗi mặt là đa giác thì số góc bằng số cạnh, mà số cạnh được tính 2 lần nên G = 2C, do đó G chẵn.

**Ví dụ 6:** Chứng minh không tồn tại khối đa diện có một số lẻ mặt và mỗi mặt lại có một số lẻ cạnh.

**Giải**

Giả sử tồn tại khối đa diện có số mặt là M lẻ và mỗi mặt chứa số lẻ cạnh $C_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$.

Ta có số góc của khối đa diện: $G = C_1 + C_2 + \ldots + C_M \Rightarrow$ G lẻ: vô lý.

Vậy không tồn tại khối đa diện thoả đề bài.

**Ví dụ 7**: Chứng minh đặc số Ơ-le của khối đa diện lồi: Đối với mỗi khối đa diện lồi H, ta kí hiệu Đ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt của H thì số $\chi(H) = Đ - C + M = 2$.

**Giải**

Ta chứng minh quy nạp theo số đỉnh Đ ≥ 4.

Khi Đ = 4 thì khối đa diện là tứ diện có Đ = 4, C = 6, M = 4 nên

Đ − C + M = 4 − 6 + 4 = 2: đúng.

Giả sử khẳng định đúng với số đỉnh Đ: Đ − C + M = 2.

Xét khối đa diện có Đ' = Đ + 1 đỉnh. Gọi A là một đỉnh và mặt $A_1A_2 \ldots A_n$ là một mặt của khối đa diện sao cho mặt phẳng chứa mặt này chia không gian làm 2 phần, một phần chứa đỉnh A và phần kia chứa khối đa diện lồi có Đ đỉnh còn lại, ta có Đ − C + M = 2.

Số đỉnh Đ' = Đ + 1, số cạnh C' = C + n, số mặt M' = M + n − 1

Do đó: Đ' − C' + M' = (Đ + 1) − (C + n) + (M + n − 1) = Đ − C + M = 2.

Vậy $\chi(H) = Đ - C + M = 2$.

Cách khác: Dùng phép chiếu từ một điểm S không thuộc bất kỳ mặt nào, mặt đi qua 3 đỉnh nào của khối đa diện.

**Ví dụ 8**: Chứng minh không tồn tại khối đa diện lồi có 7 cạnh.

**Giải**

Giả sử tồn tại khối đa diện lồi có C = 7.

Ta có đặc số Ơ-le: $Đ - C + M = 2$. nên $Đ + M = 9$. Vì $Đ \geq 4$, $M \geq 4$ nên hoặc $Đ = 4$, $M = 5$ hoặc $Đ = 5$, $M = 4$.

Với Đ = 4 thì khối đa diện lồi là tứ diện: loại

Với M = 4 thì khối đa diện lồi là tứ diện: loại

Vậy không tồn tại khối đa diện lồi có 7 cạnh.

**Ví dụ 9**: Cho khối đa diện. Chứng minh tổng số đo các góc của các mặt là $T = 2(C - M)\pi$.

**Giải**

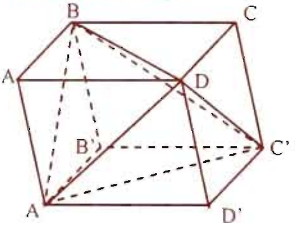
Gọi $C_i$ là số cạnh của mặt thứ i, i = 1, 2,...,M

Ta có $T = \sum_{i=1}^{M}(C_i - 2)\pi = \left(\sum_{i=1}^{M} C_i - 2M\right)\pi = (2C - 2M)\pi = 2(C - M)\pi$.

**Ví dụ 10:** Hãy phân chia một khối hộp thành năm khối tứ diện.

**Giải**

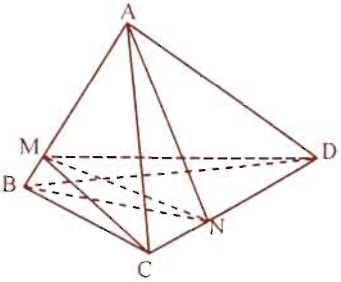
Có thể phân chia khối hộp ABCD.A'B'C'D' thành năm khối tứ diện sau đây: ABDA', CBDC', B'A'C'B, D'A'C'D, BDA'C'.



**Ví dụ 11**: Hãy phân chia một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bởi hai mặt phẳng.

**Giải**

Cho khối tứ diện ABCD. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB), ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện: AMCN, AMND, BMCN, BMND.



## DẠNG 2: PHÉP DỜI HÌNH

- Một phép biến hình F trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì: nếu F biến hai điểm bất kì M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN.

Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng...

- Hợp thành của những phép dời hình là phép dời hình.

- Phép tịnh tiến: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

- Phép đối xứng qua đường thẳng (phép đối xứng trục): Cho đường thẳng d, phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho trong mặt phẳng (M, d), d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.

- Phép đối xứng qua một điểm (phép đối xứng tâm): Cho điểm O, phép đối xứng qua điểm O là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$, hay O là trung điểm của MM'.

Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'.

- Hai hình H và H' gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đối với các khối đa diện lồi: Nếu phép dời hình F biến tập các đỉnh của khối đa diện lồi H thành tập các đỉnh của khối đa diện lồi H' thì F biến H thành H'.

Định lý: Hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', AC = A'C', BD = B'D'.

**Ví dụ 1**: Cho tứ diện ABCD. Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm A, B, C, D thành chính nó phải là phép đồng nhất.

**Giải**

Giả sử phép dời hình f biến các điểm A, B, C, D thành chính các điểm đó, tức là f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C, f(D) = D. Ta chứng minh rằng f biến điểm M bất kì thành M. Thật vậy giả sử M' = f(M) và M' khác với M. Khi đó vì phép dời hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên AM = AM', BM = BM', CM = CM', DM = DM', suy ra bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn MM', điều đó trái với giả thiết ABCD là hình tứ diện. Vậy M' trùng với M và do đó f là phép đồng nhất.

**Ví dụ 2**: Cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng bằng nhau: AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', DB = D'B', AC = A'C'. Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

**Giải**

Giả sử có hai phép dời hình $f_1$ và $f_2$ đều biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Nếu $f_1$ và $f_2$ khác nhau thì có ít nhất một điểm M sao cho nếu $M_1 = f_1(M)$ và $M_2 = f_2(M)$ thì $M_1$ và $M_2$ là hai điểm phân biệt. Khi đó vì $f_1$ và $f_2$ đều là phép dời hình nên $A'M_1 = AM$

và $A'M_2 = AM$, vậy $A'M_1 = A'M_2$, tương tự $B'M_1 = B'M_2$, $C'M_1 = C'M_2$, $D'M_1 = D'M_2$, do đó bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $M_1M_2$, trái với giả thiết A'B'C'D' là hình tứ diện. Do đó với mọi điểm M ta đều có $f_1(M) = f_2(M)$, tức là hai phép dời hình $f_1$ và $f_2$ trùng nhau.

Vậy có không quá một phép dời hình biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

**Ví dụ 3**:

a) Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình f biến A thành A, biến B thành B. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M nằm trên đường thẳng AB thành điểm M.

b) Cho tam giác ABC và phép dời hình f biến tam giác ABC thành chính nó, tức là $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M của mp(ABC) thành chính nó, tức là $f(M) = M$.

**Giải**

a) Ta có $f(A) = A$, $f(B) = B$. Giả sử điểm M thuộc đường thẳng AB và $f(M) = M'$. Khi đó M' thuộc đường thẳng AB và $AM = AM'$, $BM = BM'$. Suy ra M' trùng M, tức là f biến M thành chính nó.

Vậy f biến mọi điểm M nằm trên đường thẳng AB thành chính điểm M.

b) Vì $f(A) = A$, $f(B) = B$ và $f(C) = C$ nên f biến mp(ABC) thành mp(ABC). Bởi vậy nếu M thuộc mp(ABC) và $f(M) = M'$ thì M' thuộc mp(ABC) và $AM = AM'$, $BM = BM'$, $CM = CM'$. Nếu M' và M phân biệt thì ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng trung trực của đoạn thẳng MM' trên mp(ABC), trái với giả thiết ABC là tam giác. Vậy $f(M) = M$.

**Ví dụ 4**:

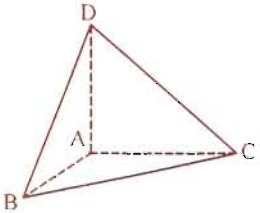
a) Cho hai tam giác bằng nhau ABC và A'B'C' ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$). Chứng minh rằng có đúng hai phép dời hình, mỗi phép biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

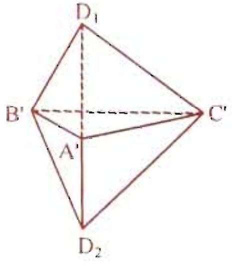
b) Cho tam giác ABC. Có những phép dời hình nào biến tam giác ABC thành chính nó?

**Giải**

a) Trên đường thẳng a vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm D khác A, trên đường thẳng a' vuông góc với mp(A'B'C') tại A' có hai điểm phân biệt $D_1$ và $D_2$ sao cho $A'D_1 = A'D_2 = AD$.

Ta có các hình tứ diện ABCD, $A'B'C'D_1$ và $A'B'C'D_2$ có các cạnh tương ứng bằng nhau. Nếu f là phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì hoặc f biến D thành $D_1$ hoặc f biến D thành $D_2$.





ABC

Vậy có đúng hai phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Đó là phép dời hình $f_1$ biến tứ diện ABCD thành tứ diện $A'B'C'D_1$ và phép dời hình $f_2$ biến tứ diện ABCD thành tứ diện $A'B'C'D_2$.

b) Đây là trường hợp riêng của a) khi hai tam giác ABC và A'B'C' trùng nhau. Vậy ta có hai phép dời hình biến ABCD thành chính nó: đó là phép đồng nhất và phép đối xứng qua mp(ABC).

**Ví dụ 5:** Cho tứ diện đều ABCD và phép dời hình f biến ABCD thành chính nó, nghĩa là biến mỗi đỉnh của tứ diện thành một đỉnh của tứ diện. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho M = f(M) trong các trường hợp sau đây:

a) f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A  b) f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D

c) f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D

### Giải

a) Theo giả thiết f(A) = B và f(B) = C, f(C) = A. Do đó f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB = MC. Suy ra tập hợp các điểm M là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Theo giả thiết f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D. Do đó f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB và MC = MD, tức là M đồng thời nằm trên các mặt phẳng trung trực của AB và CD. Suy ra tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD.

c) Theo giả thiết f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D. Do đó f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB = MC = MD. Suy ra tập hợp các điểm M gồm một điểm duy nhất là trọng tâm tứ diện ABCD.

**Ví dụ 6**: Chứng minh rằng các phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm là các phép dời hình.

### Giải

- Nếu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$, suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ và do đó MN = M'N'.

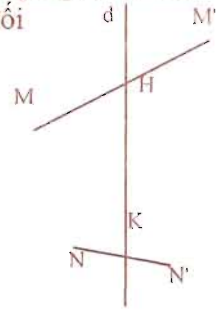
Vậy phép tịnh tiến là một phép dời hình.

- Nếu phép đối xứng tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$  $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$

Suy ra: $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM}$

Do đó M'N' = MN, suy ra phép đối xứng tâm O là một phép dời hình.

**Ví dụ 7**: Chứng minh rằng các phép đối xứng trục, đối xứng qua mặt phẳng là các phép dời hình.



### Giải

Giả sử phép đối xứng qua đường thẳng d biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM' và NN', ta có:

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = 2\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}$

ABC

$= \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HN'} + \overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{NN'}$ đều vuông góc với $\overrightarrow{HK}$ nên:

$$(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}).(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}) = 2\overrightarrow{HK}(\overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}) = 0$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{M'N'}^2$ hay MN = M'N' Vậy phép đối xứng qua d là phép dời hình.

Giả sử phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến M, N thành M', N' Nếu M, N thuộc (P) thì M' ≡ M, N' ≡ N nên M'N' = MN.

Nếu có ít nhất một trong hai điểm M, N không nằm trên (P) thì qua bốn điểm M, N, M', N' có một mặt phẳng (Q) (MM' và NN' cùng vuông góc với (P) nên song song với nhau). Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) thì trong mp(Q), phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hai điểm M, N thành hai điểm M' và N' nên MN = M'N'

**Ví dụ 8**: Cho hai đường thẳng song song a và a', hai mặt phẳng (P) và (P') cùng vuông góc với a. Tìm phép tịnh tiến biến a thành a' và biến (P) thành (P').

**Giải**

Gọi O là giao điểm của a và (P), O' là giao điểm của a' và (P). Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ sẽ biến a thành a' và biến (P) thành (P').

**Ví dụ 9**: Cho tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu (S) bán kính R = AB, một điểm M thay đổi trên mặt cầu. Gọi C', D', M' là các điểm sao cho: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Chứng minh rằng nếu BC'D'M' là hình tứ diện thì tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó nằm trên (S).

**Giải**

Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ biến A thành B, C thành C', D thành D' và M thành M', tức là biến tứ diện ACDM thành tứ diện BC'D'M', do đó T biến tâm O của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ACDM thành tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BC'D'M', tức là $\overrightarrow{OO'} = \vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Vì OO' = AB = R nên điểm O' nằm trên mặt cầu (S).

**Ví dụ 10**: Chứng minh rằng hợp thành của các phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

**Giải**

Giả sử $T_1$ và $T_2$ lần lượt là các phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$ Nếu $T_1$ biến điểm M thành điểm $M_1$ và $T_2$ biến $M_1$ thành $M_2$ thì hợp thành $T_2$ o $T_1$ biến điểm M thành điểm $M_2$.

Vì $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v_2}$ nên $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

Vậy $T_2$ o $T_1$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

Một cách tổng quát: hợp thành của n phép tịnh tiến đã cho là một phép tịnh tiến có vectơ tịnh tiến bằng tổng các vectơ của các phép tịnh tiến đã cho.

ABC

**Ví dụ 11**: Cho tứ diện ABCD. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Với điểm M bất kì trong không gian ta gọi $M_1$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AA_1}$ $M_2$ là ảnh của $M_1$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BB_1}$. $M_3$ là ảnh của $M_2$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{CC_1}$. $M_4$ là ảnh của $M_3$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{DD_1}$ Chứng minh rằng M trùng với $M_4$.

**Giải**

Ta có $M_4$ là ảnh của M qua 4 phép tịnh tiến liên tiếp. Hợp thành phép tịnh tiến đó là một phép tịnh tiến theo vectơ

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}$$

Gọi G là trọng tâm tứ diện, theo tính chất trọng tâm thì:

$$\vec{v} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GD}$$

$$= -\frac{4}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$$

Do đó M trùng với $M_4$.

**Ví dụ 12**: Cho phép dời hình f thoả mãn điều kiện phép hợp thành của f và f là phép đồng nhất: f o f = e, biết rằng có một điểm I duy nhất sao cho f biến I thành chính nó. Chứng minh rằng f là phép đối xứng tâm.

**Giải**

Với một điểm M bất kì khác I, ta gọi M' là ảnh của M qua f, khi đó M và M' không trùng nhau. Vì f o f = e nên f biến M' thành M, vậy f biến đoạn thẳng MM' thành đoạn thẳng M'M. Từ đó suy ra f biến trung điểm đoạn thẳng MM' thành chính nó và vì vậy, theo giả thiết trung điểm MM' phải là điểm I. Vậy f là phép đối xứng qua tâm I.

**Ví dụ 13**: Chứng minh rằng hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến, hợp thành của một số lẻ của phép đối xứng tâm là phép đối xứng tâm.

**Giải**

- Giả sử $Đ_1$ và $Đ_2$ là các phép đối xứng tâm có tâm lần lượt là $O_1$ và $O_2$. Gọi M là một điểm bất kì, $M_1 = Đ_1(M)$ và $M' = Đ_2(M_1)$ thì phép hợp thành $Đ_2 o Đ_1$ biến M thành M'.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{O_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1O_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$

Suy ra $Đ_2 o Đ_1$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$

Với điểm M ta lấy $M_1$ đối xứng với M qua O, và lấy M' sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$ Khi đó hợp thành $T_{\vec{v}}$ o $Đ_O$ biến M thành M'. Nếu gọi I là trung điểm của MM' thì $\overrightarrow{OI} = \frac{\vec{v}}{2}$ Vậy điểm I cố định. Suy ra $T_{\vec{v}}$ o $Đ_O$ là phép đối xứng qua I.

ABC

Tương tự $Đ_O \circ T_{\overline{v}}$ là phép đối xứng qua điểm I' mà $\overline{OI'} = -\frac{\overline{v}}{2}$

Vì hợp thành của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến nên hợp thành của 2n phép đối xứng tâm là hợp thành của n phép tịnh tiến và do đó là một phép tịnh tiến.

Hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng tâm là hợp thành của một phép tịnh tiến và một phép đối xứng tâm nên là một phép đối xứng tâm.

**Ví dụ 14**: Chứng minh rằng một hình tứ diện không thể có tâm đối xứng, tổng quát một hình chóp không có tâm đối xứng.

**Giải**

Trước hết ta thấy rằng nếu một hình chóp có tâm đối xứng O, thì số mặt chẵn. Thật vậy nếu M là điểm bất kì thuộc một mặt nào đó của hình chóp, thì điểm M' đối xứng với M phải thuộc một mặt hình chóp (vì phép đối xứng biến mặt thành mặt, cạnh thành cạnh và đỉnh thành đỉnh). Điều đó chứng tỏ mỗi cặp mặt của hình chóp ứng với một đoạn thẳng MM'. Vì số các đoạn như vậy là nguyên, nên số mặt là chẵn. Vậy đáy của hình chóp có tâm đối xứng đa giác với số lẻ cạnh nên O không thuộc mặt phẳng đáy và không thuộc các mặt bên. Gọi (T) là thiết diện của hình chóp đi qua O và song song với đáy ((T) tồn tại vì phép đối xứng qua O biến đỉnh hình chóp thành điểm thuộc đáy chóp), khi đó (T) là đa giác có tâm đối xứng lại có số lẻ cạnh (vì các cạnh của (T) chỉ nằm trên các mặt xung quanh của hình chóp). Mâu thuẫn đó chứng minh bài toán, và suy cho tứ diện bất kì.

**Ví dụ 15**: Cho mặt phẳng (P) và tứ diện ABCD. Với mỗi điểm M thuộc (P) ta xác định điểm N theo công thức: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 2\overline{MN}$ (1)

Tìm tập hợp N, khi M di động trong (P).

**Giải**

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD thì G cố định.

(1) $\Leftrightarrow 4\overline{MG} = 2\overline{MN} \Leftrightarrow \overline{MG} = \overline{GN} \Leftrightarrow \overline{GM} = -\overline{GN}$.

Do đó N là ảnh của M qua phép đối xứng tâm G.

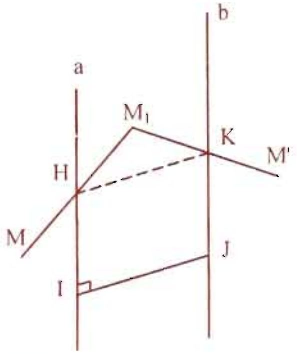
Vậy tập hợp N là mặt phẳng đối xứng với (P) qua G.

**Ví dụ 16**: Chứng minh rằng:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến

b) Hợp thành của một phép đối xứng trục và một phép tịnh tiến theo vectơ vuông góc với trục đối xứng là một phép đối xứng trục.

## Giải



a) Giả sử $Đ_a$ và $Đ_b$ là các phép đối xứng trục có trục lần lượt là các đường thẳng a và b song song với nhau. Lấy hai điểm I và J lần lượt nằm trên a và b sao cho $IJ \perp a$. Với điểm M bất kì, ta gọi $M_1 = Đ_a(M)$ và $M' = Đ_b(M_1)$ thì phép hợp thành $Đ_b$ o $Đ_a$ biến M thành M'. Nếu gọi H là trung điểm của $MM_1$ và K là trung điểm của $M_1M'$ thì:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1K} = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{IJ}$$

Vậy hợp thành $Đ_b$ o $Đ_a$ chính là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{IJ}$.

b) Giả sử $Đ_a$ là phép đối xứng qua đường thẳng a, $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v}$ vuông góc với a. Gọi b là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$ thì phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là hợp thành của hai phép đối xứng $Đ_a$ và $Đ_b$ qua các đường thẳng a và b: $T_{\vec{v}} = Đ_b$ o $Đ_a$.

Bởi vậy $T_{\vec{v}}$ o $Đ_a = Đ_b$ o $Đ_a$ o $Đ_a = Đ_b$ o e $= Đ_b$.

Gọi b' là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $-\frac{\vec{v}}{2}$ thì phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là hợp thành của hai phép đối xứng $Đ_{b'}$ và $Đ_a$ qua các đường thẳng b' và a: $T_{\vec{v}} = Đ_a$ o $Đ_{b'}$.

Do đó: $Đ_a$ o $T_{\vec{v}} = Đ_a$ o $Đ_a$ o $Đ_{b'} =$ e o $Đ_{b'} = Đ_{b'}$.

**Ví dụ 17**: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi O là trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng với mọi điểm K nằm trong tứ diện ta có $KA + KB + KC + KD \geq OA + OB + OC + OD$.

## Giải

Ta có MN là trục đối xứng của tứ diện đều ABCD.

Gọi K' là điểm đối xứng với K qua MN, H là giao của KK' và MN. Ta có $KA + KB = AK + AK' > 2AH$ và $KC + KD = CK + CK' > 2CH$. Ta chứng minh rằng $AH + CH > OA + OC$.

Xét trong mặt phẳng (MCD), điểm A' sao cho tia MA' vuông góc với MN, ngược chiều với tia NC và độ dài $MA' = MA$.

Ta có $HA' = HA$ nên $HA + HC = HA' + HC > A'C$. Vì A'C đi qua O nên $A'C = OC + OA' = OC + OA$.

Vậy $KA + KB + KC + KD \geq OA + OB + OC + OD$.

**Ví dụ 18**: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy là tam giác cân ABC ($AB = AC$). Trên các cạnh AC và A'B' ta lấy các điểm tương ứng M và M' sao cho $AM = A'M'$. Tìm tập hợp trung điểm của đoạn MM'.

ABC

### Giải

Gọi I, J là trung điểm cạnh bên AA' và giao các đường chéo hình chữ nhật BCC'B'. Ta có IJ là trục đối xứng của hai đoạn AC và A'B', do đó M và M' đối xứng với nhau qua IJ. Vậy tập hợp các trung điểm của MM' thuộc đoạn IJ

**Ví dụ 19**: Gọi Đ là phép đối xứng qua mặt phẳng (P) và a là một đường thẳng nào đó. Giả sử Đ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Trong trường hợp nào thì:

a) a trùng với a' | b) a song song với a'

c) a cắt a' | d) a và a' chéo nhau?

### Giải

a) a trùng với a' khi a nằm trên mp(P) hoặc a vuông góc với mp(P).

b) a song song với a' khi a song song với mp(P).

c) a cắt a' khi a cắt mp(P) nhưng không vuông góc với (P).

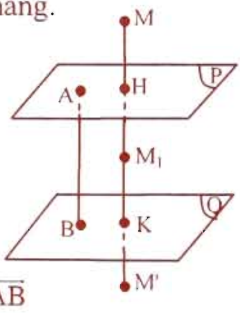
d) a và a' không bao giờ cắt nhau.

**Ví dụ 20**: Chứng minh:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng.

### Giải

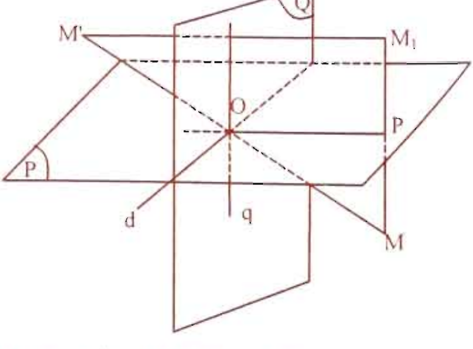


a) Lấy hai điểm A và B lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho AB ⊥ (P). Với một điểm M bất kì, ta gọi $M_1$ là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng với $M_1$ qua mp(Q).

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của $MM_1$ và $M_1M'$ thì ta có:

$$\overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M'} = 2\left(\overline{HM_1} + \overline{M_1K}\right) = 2\overline{HK} = 2\overline{AB}$$

Vậy phép hợp thành là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overline{AB}$.



b) Gọi d là giao tuyến của (P) và (Q).

Với một điểm M bất kì, ta gọi $M_1$ là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng của $M_1$ qua mp(Q).

Nếu M nằm trên (P) hoặc trên (Q) thì thấy M' là điểm đối xứng của M qua d.

Nếu M không nằm trên cả (P) và (Q) thì ba điểm M, $M_1$ và M' xác định mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q), do đó vuông góc với d.

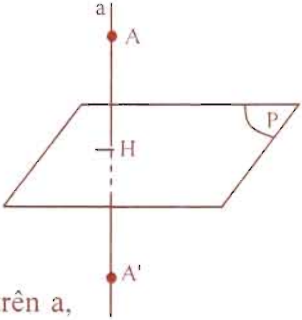
Gọi giao tuyến của (R) với (P) và (Q) lần lượt là p, q, còn O là giao điểm của p và q.

Xét trong mặt phẳng (R) thì điểm M' là ảnh của điểm M qua hợp thành của phép đối xứng qua đường thẳng p và phép đối xứng qua đường thẳng q. Suy ra O là trung điểm của MM'.

Mặt khác MM' ⊥ d nên phép hợp thành là phép đối xứng qua đường thẳng d.

**Ví dụ 21**: Cho mặt phẳng (P) và cho phép dời hình f có tính chất: f biến điểm M thành điểm M khi và chỉ khi M nằm trên (P). Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng qua mặt phẳng (P).

**Giải**



Phép dời hình f biến mọi điểm M nằm trên (P) thành M. Với điểm A không nằm trên (P) ta gọi a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Nếu H là giao điểm của a và (P), vì f(H) = H nên f biến a thành đường thẳng đi qua H và vuông góc với (P), vậy f(a) = a.

Từ đó suy ra điểm A biến thành điểm A' nằm trên a, A' khác với A và HA = HA'.

Vậy (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA'. Suy ra f là phép đối xứng qua mp(P).

**Ví dụ 22**: Tìm các mặt phẳng đối xứng của các hình sau đây:

a) Hình chóp tứ giác đều.

b) Hình chóp cụt tam giác đều.

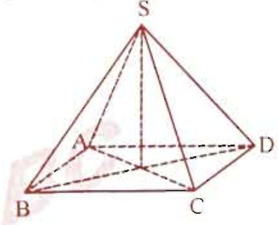
c) Hình hộp chữ nhật mà không có mặt nào là hình vuông.

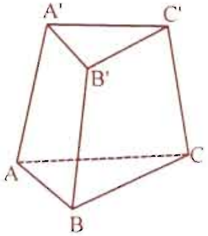
**Giải**

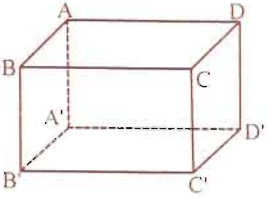
a) Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có 4 mặt phẳng đối xứng: mp(SAC), mp(SBD), mặt phẳng trung trực của AB (đồng thời của CD) và mặt phẳng trung trực của AD (đồng thời của BC).

b) Hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C' có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, BC, CA.

c) Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' (mà không có mặt nào là hình vuông) có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB,AD, AA'.



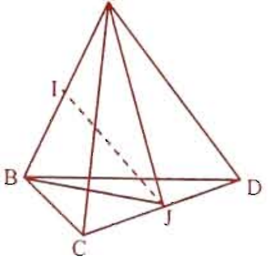


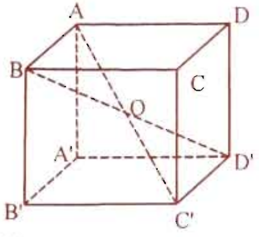


**Ví dụ 23**:

a) Tìm các trục đối xứng của hình tứ diện đều ABCD.

b) Tìm tất cả các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều ABCD.





**Giải**

a) Giả sử d là trục đối xứng của tứ diện đều ABCD, tức là phép đối xứng Đ qua đường thẳng d biến các đỉnh của tứ diện thành các đỉnh của tứ diện.
Trước hết ta nhận thấy rằng trục đối xứng d không thể là đường thẳng đi qua hai đỉnh nào đó của hình tứ diện, vì hiển nhiên phép đối xứng qua đường thẳng d như thế không biến hình tứ diện thành chính nó.
Bây giờ ta chứng tỏ rằng trục đối xứng d cũng không đi qua một đỉnh nào của tứ diện. Thật vậy, nếu d đi qua A thì vì B không thể nằm trên d nên B biến thành C hoặc D. Nếu B biến thành C thì C biến thành B nên D biến thành D và do đó d đi qua A và D, vô lí. Nếu B biến thành D thì D biến thành B và do đó C biến thành C và d đi qua A và C, vô lí.
Vậy phép đối xứng Đ qua đường thẳng d biến điểm A thành một trong ba điểm B, C hoặc D.Do đó tứ diện đều có 3 trục đối xứng là 3 đường thẳng đi qua trung điểm 2 cạnh đối diện (đường trung bình).

b) Giả sử $\alpha$ là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều ABCD, tức là phép đối xứng $Đ_\alpha$ biến tập hợp {A, B, C, D} thành chính nó. Vì $Đ_\alpha$ không thể biến mỗi đỉnh thành chính nó (vì khi đó $Đ_\alpha$ là phép đồng nhất) nên phải có một đỉnh, A chẳng hạn, biến thành một đỉnh khác, B chẳng hạn. Khi đó $\alpha$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB (hiển nhiên $\alpha$ đi qua C và D).
Vậy tứ diện ABCD có 6 mặt phẳng đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực của các cạnh.

**Ví dụ 24**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' Tìm

a) Tâm đối xứng b) Mặt đối xứng c) Trục đối xứng.

**Giải**

a) Tâm đối xứng O là giao điểm của 4 đường chéo AC', BD', CA' và DB'.

b) Gọi $\alpha$ là mặt đối xứng của hình lập phương thì phép đối xứng qua $\alpha$ biến hình vuông ABCD thành chính nó, hoặc thành hình vuông chung cạnh hoặc thành hình vuông A'B'C'D'.
Từ đó thì hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng là 3 mặt phẳng trung trực của các cạnh và 6 mặt phẳng chứa hai cạnh đối.

c) 9 trục đối xứng gồm 3 trục của các mặt và 6 đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối.

**Ví dụ 25**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) Các hình chóp A.A'B'C'D' và C'.ABCD bằng nhau.

b) Các hình lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C' bằng nhau.

**Giải**

a) Gọi O là tâm của hình lập phương. Vì phép đối xứng tâm O biến các đỉnh của hình chóp A.A'B'C'D' thành các đỉnh của hình chóp C'ABCD. Vậy hai hình chóp đó bằng nhau.

b) Phép đối xứng qua mp(ADC'B') biến các đỉnh của hình lăng trụ ABC. A'B'C' thành các đỉnh của hình lăng trụ AA'D'.BB'C' nên hai hình lăng trụ đó bằng nhau.

**Ví dụ 26**: Chứng minh 2 hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

**Giải**

Giả sử ABCD.A'B'C'D' và MNPQ.M'N'P'Q' là hai hình lập phương có cạnh đều bằng a. Hai tứ diện ABDA' và MNQM' có các cạnh tương ứng bằng nhau nên bằng nhau, tức là có phép dời hình F biến các điểm A, B, D, A' lần lượt thành M, N, Q, M'. Vì F là phép dời hình nên F biến hình vuông thành hình vuông, do đó F biến điểm C thành điểm P, biến điểm B' thành N', biến điểm D' thành Q' và biến điểm C' thành P' Vậy hai hình lập phương đã cho bằng nhau.

## DẠNG 3: KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU VÀ PHÉP VỊ TỰ

- Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{OM}' = k\overline{OM}$ gọi là phép vị tự. Điểm O gọi là tâm vị tự, số k gọi là tỉ số vị tự.

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$ và do đó $M'N' = |k|MN$.

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

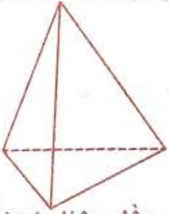
- Hình H được gọi là đồng dạng với hình H' nếu có một phép vị tự biến hình H thành hình $H_1$ mà hình $H_1$ bằng hình H'.

- Khối đa diện đều mà mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh được gọi là khối đa diện đều loại {n, p}.

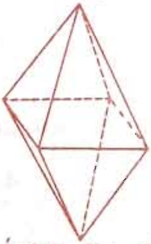
Khối tứ diện đều là loại {3; 3}; Khối bát diện đều là loại {3; 4}

Khối lập phương là loại {4; 3}; Khối 20 mặt đều là loại {3; 5}.

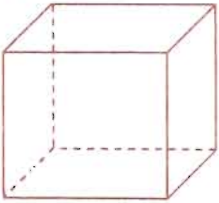
Khối 12 mặt đều là loại {5; 3}.



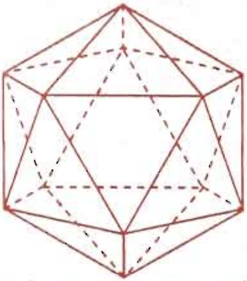
Khối tứ diện đều



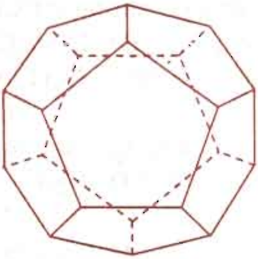
Khối bát diện đều



Khối lập phương



Khối nhị thập diện đều



Khối thập nhị diện đều

**Chú ý:** Để chứng minh khối đa diện (K) là khối đa diện đều, ta có thể dùng định nghĩa của 1 trong 5 loại khối đa diện hoặc dùng phép vị tự, khối (K) là ảnh của khối đa diện đều nào đó.

**Ví dụ 1**: Chứng minh rằng phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến mỗi mặt phẳng thành một mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đó.

**Giải**

- Giả sử phép vị tự V tỉ số k biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Lấy hai điểm phân biệt M, N nằm trên a thì ảnh của chúng là các điểm M', N' nằm trên a'. Theo tính chất của phép vị tự thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ Do đó hai đường thẳng a và a' song song hoặc trùng nhau.
- Giả sử phép vị tự V biến mp($\alpha$) thành mp($\alpha'$). Lấy trên ($\alpha$) hai đường thẳng cắt nhau a và b thì ảnh của chúng qua V là hai đường thẳng a' và b' nằm trên ($\alpha'$) và lần lượt song song hoặc trùng với a và b. Từ đó suy ra hai mặt phẳng ($\alpha$) và ($\alpha'$) song song hoặc trùng nhau.

**Ví dụ 2**: Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k'. Chứng minh rằng nếu $kk' = 1$ thì phép hợp thành V' o V là một phép tịnh tiến.

**Giải**

Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k, V' là phép vị tự tâm O' tỉ số k'. Với mỗi điểm M ta lấy $M_1$ sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M_1}$ thì phép hợp thành V'o V biến điểm M thành điểm M'.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'M_1}$

$$= \overrightarrow{OM_1} - \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1} + k'\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'M_1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (k'-1)\overrightarrow{O'M_1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (1 - k')\overrightarrow{M_1O'}$$

Vì $kk' = 1$ nên $k' = \dfrac{1}{k}$ bởi vậy đẳng thức trên trở thành:

$$\overrightarrow{MM'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1O'}\right) = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$$

Từ đó suy ra V' o V là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{v} = \dfrac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$

**Ví dụ 3**: Cho phép vị tự V tâm O tỉ số k và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k' với $kk' \neq 1$. Gọi $F = V' \circ V$. Chứng minh rằng:

a) Có điểm I duy nhất sao cho $F(I) = I$.

b) F là phép vị tự tâm I tỉ số kk'.

**Giải**

a) Giả sử $F(I) = I$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu V biến I thành $I_1$ thì V' biến $I_1$ thành I, tức là: nếu $\overrightarrow{OI_1} = k\overrightarrow{OI}$ thì $\overrightarrow{O'I} = k'\overrightarrow{O'I_1}$ hay:

$$\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OO'} = k'(\overrightarrow{OI_1} - \overrightarrow{OO'}) = k'(k\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OO'})$$

$$\Leftrightarrow (1 - kk')\,\overrightarrow{OI} = (1 - k')\overrightarrow{OO'} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OI} = \frac{(1 - k')\overrightarrow{OO'}}{1 - kk'}$$

Vậy điểm I được xác định duy nhất với $kk' \neq 1$.

b) Với điểm M bất kì, gọi $M_1$ là ảnh của M qua phép vị tự V. M' là ảnh của $M_1$ qua phép vị tự V', thì F biến M thành M'. Khi đó ta có $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M_1}$. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM'} &= \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'I} = k'\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'I}\\ &= k'(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OO'}) - \overrightarrow{O'I} = k'(k\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}) - \overrightarrow{O'I}\\ &= kk'\overrightarrow{OM} - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'I} = kk'(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'I}\\ &= kk'\overrightarrow{IM} + kk'\overrightarrow{OI} - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OO'} = kk'\overrightarrow{IM}.\end{aligned}$$

Vậy F là phép vị tự tâm I tỉ số kk'

**Ví dụ 4**: Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$. Đặt $F = T \circ V$ và $F' = V \circ T$. Chứng minh rằng:

a) Có một điểm I duy nhất sao cho $F(I) = I$ và điểm I' duy nhất sao cho $F'(I') = I'$.

b) F là phép vị tự tâm I tỉ số k, F' là phép vị tự tâm I' tỉ số k.

**Giải**

a) Giả sử $F(I) = I$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu V biến I thành $I_1$ thì T biến $I_1$ thành I, tức là: nếu $\overrightarrow{OI_1} = k\overrightarrow{OI}$ thì $\overrightarrow{I_1I} = \vec{v}$. Từ đó suy ra: $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI_1} = \vec{v}$ hay $\overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = \vec{v}$, do đó $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\vec{v}}{1 - k}$

Vậy điểm I xác định duy nhất, với $k \neq 1$.

Giả sử $F'(I') = I'$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu T biến I' thành $I'_1$ thì V biến $I'_1$ thành I', tức là: nếu $\overrightarrow{I'I'_1} = \vec{v}$ thì $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI'_1}$. Từ đó suy ra:

$$\overrightarrow{OI'} = k(\overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{I'I'_1})$$

hay $(1 - k)\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{I'I'_1} = k\,\vec{v}$ do đó $\overrightarrow{OI'} = \dfrac{k\vec{v}}{1 - k}$

Vậy điểm I' xác định duy nhất, với $k \neq 1$.

b) Với mỗi điểm M bất kì ta lấy điểm $M_1$ sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$, rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$. Khi đó phép hợp thành $F = T \circ V$ biến M

ABC

thành M'. Ta xác định điểm O' sao cho $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{\vec{v}}{1-k}$ thì O' là điểm cố định không phụ thuộc M và có:

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{IO} + k\overrightarrow{OM} + \vec{v} = \overrightarrow{IO} + k(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IO}) + \vec{v}$$
$$= (1-k)\overrightarrow{IO} + \vec{v} + k\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM}$$

Suy ra F = T o V là phép vị tự tâm I tỉ k. Chứng minh tương tự thì F ' = V o T là phép vị tự tâm I' tỉ k.

**Ví dụ 5**: Cho hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng song song: AB // A'B', AC // A'C', AD // A'D', CB // C'B', BD // B'D', DC // D'C'. Chứng minh rằng có một phép tịnh tiến hoặc một phép vị tự biến tứ diện này thành tứ diện kia.

**Giải**

Vì AB // A'B' nên có số k ≠ 0 sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'}$ Ta chứng minh rằng khi đó ta cũng có $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$ $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{C'B'}$ $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{D'C'}$

Thật vậy, xét tam giác ABC và A'B'C' có các cạnh tương ứng song song nên ta phải có các số n và m sao cho $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{C'B'}$. Khi đó:

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = k(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{B'C'})$

$\Leftrightarrow n\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{BC} = k(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{B'C'}) \Leftrightarrow (n-k)\overrightarrow{A'C'} = (m-k)\overrightarrow{B'C'}$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ không cùng phương nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi n – k = m – k = 0, tức là n = m, vậy $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{B'C'}$

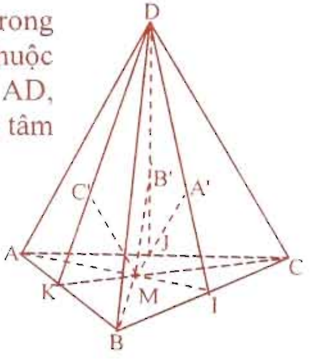
Các đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Xét trường hợp k = 1. Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ ... nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = ...$

Suy ra phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D'.

Nếu k ≠ 1 thì hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại một điểm O nào đó. Khi đó phép vị tự V tâm O tỉ số k biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D'

**Ví dụ 6**: Cho tứ diện ABCD. Điểm M lưu động trong tam giác ABC. Các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các mặt (BCD), (CAD), (ABD) sao cho MA' // AD, MB' // BD, MC' // CD. Tìm tập hợp các trọng tâm của tam giác A'B'C'.



**Giải**

Ta chứng minh: $\overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DC'} = 2\overrightarrow{DM}$

Vì G là trọng tâm tam giác A'B'C' nên

$\overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DC'} = 3\overrightarrow{DG}$

Do đó $3\overline{DG} = 2\overline{DM}$ nên $\overline{DG} = \frac{2}{3}\overline{DM}$

Phép vị tự tâm D tỉ số $k = \frac{2}{3}$ biến M thành G nên tập hợp các điểm G là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự đó.

**Ví dụ 7**: Chứng minh chỉ có năm loại khối đa diện đều, đó là các loại {3; 3}, {4;3}, {3;4}, {5;3}, {3;5}.

**Giải**

Giả sử khối đa diện đều loại {n; p} có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt. Vì mỗi mặt có n cạnh nên M mặt sẽ có nM cạnh, nhưng mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên 2C = nM. Vì mỗi đỉnh chung cho p cạnh nên Đ đỉnh sẽ có pĐ cạnh, nhưng mỗi cạnh lại đi qua hai đỉnh nên 2C = pĐ.

Suy ra pĐ = 2C = nM. Ta có Đ – C + M = 2.

Do đó $\dfrac{\text{Đ}}{\frac{1}{p}} = \dfrac{C}{\frac{1}{2}} = \dfrac{M}{\frac{1}{n}} = \dfrac{\text{Đ} - C + M}{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}} = \dfrac{4pn}{2n + 2p - np}$

Suy ra : $\text{Đ} = \dfrac{4n}{2n + 2p - np}$ ; $C = \dfrac{2np}{2n + 2p - np}$ $M = \dfrac{4p}{2n + 2p - np}$

Ta có Đ, C, M, n, p đều là những số nguyên dương nên

$2n + 2p - np > 0$ hay $(n - 2)(p - 2) < 4$.

Vì n – 2 và p – 2 là hai số nguyên dương nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

1) n – 2 = 1, p – 2 = 1 hay n = p = 3, ta có khối đa diện đều loại {3;3}. Khi đó Đ = 4, C = 6, M = 4: Khối tứ diện đều.

2) n – 2 = 2, p – 2 = 1 hay n = 4, p = 3, ta có khối đa diện đều loại {4; 3}. Khi đó Đ = 8, C = 12, M = 6: Khối lập phương.

3) n – 2 = 1, p – 2 = 2 hay n = 3, p = 4, ta có khối đa diện đều loại {3; 4}. Khi đó Đ = 6, C = 12, M = 8: Khối tám mặt đều (khối bát diện đều).

4) n – 2 = 3, p – 2 = 1 hay n = 5, p = 3, ta có khối đa diện đều loại {5; 3}. Khi đó Đ = 20, C = 30, M = 12: Khối mười hai mặt đều (khối thập nhị diện đều)

5) n – 2 = 1, p – 2 = 3 hay n = 3, p = 5, ta có khối đa diện đều loại {3; 5}. Khi đó Đ = 12, C = 30, M = 20: Khối hai mươi mặt đều (khối nhị thập diện đều).

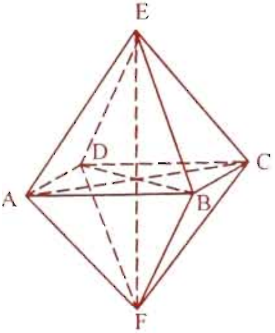
**Ví dụ 8:** Hai đỉnh của một khối tám mặt đều được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo của khối tám mặt đều. Chứng minh rằng trong khối tám mặt đều thì ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường; đôi một vuông góc với nhau và bằng nhau.

**Giải**

Giả sử ABCDEF là khối tám mặt đều. Ba đường chéo của nó là EF, AC và BD. Bốn điểm A, B, C, D cách đều hai điểm E và F nên cùng nằm trên một mặt phẳng.

Vậy ABCD là hình thoi, ngoài ra E cách đều A, B, C, D nên hình thoi đó là hình vuông.

Suy ra hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, chúng vuông góc với nhau và có độ dài bằng nhau. Tương tự đối với các cặp đường chéo còn lại.



**Ví dụ 9**: Cho hình bát diện đều. Tìm:

a) Tâm đối xứng b) Mặt đối xứng c) Trục đối xứng.

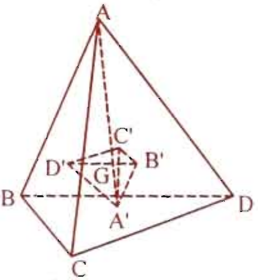
**Giải**

a) Hình bát diện đều ABCDEF có tâm đối xứng O là giao điểm của 3 đường chéo AC, BD và EF

b) Hình bát diện đều ABCDEF có tất cả 9 mặt phẳng đối xứng: ba mặt phẳng (ABCD), (BEDF), (AECF) và 6 mặt phẳng, mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).

c) Hình bát diện đều ABCDEF có 9 trục đối xứng: ba trục của mặt (ABCD), (BEDF), (AECF) và 6 đường thẳng đi qua 2 trung điểm của 2 cạnh song song.

**Ví dụ 10**: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' đồng dạng. Suy ra nếu ABCD là tứ diện đều thì A'B'C'D' cũng là tứ diện đều.



**Giải**

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

Ta có: $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$ $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$ $\overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GD}$

Suy ra phép vị tự V tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'

Vậy V biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' nên 2 tứ diện đó đồng dạng ⇒ đpcm.

**Ví dụ 11**: Cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng tỉ lệ:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A}{DA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'D'}{BD} = k$$

Chứng minh hai tứ diện đồng dạng.

**Giải**

Xét phép vị tự V tâm O nào đó và có tỉ số k.

Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là ảnh của ABCD qua V

Ta có: $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $C_1D_1 = kCD$,

$D_1A_1 = kDA$, $A_1C_1 = kAC$, $B_1D_1 = kBD$.

Theo giả thiết thì $A_1B_1 = A'B'$, $B_1C_1 = B'C'$, $C_1D_1 = C'D'$, $D_1A_1 = D'A'$, $A_1C_1 = A'C'$, $B_1D_1 = B'D'$, do đó hai tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ và A'B'C'D' bằng nhau.

Vậy hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' đồng dạng.

**Ví dụ 12**: Chứng minh rằng hai hình lập phương bất kì đều đồng dạng với nhau.

**Giải**

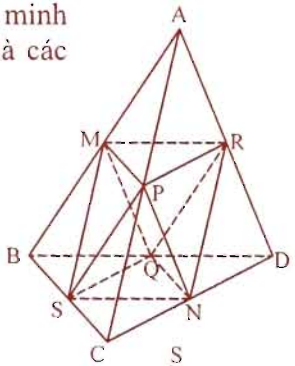
Giả sử hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a và hình lập phương MNPQ. M'N'P'Q' cạnh b.

Xét phép vị tự V tâm O nào đó và tỉ số $k = \frac{b}{a}$ Khi đó ảnh của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a thành hình lập phương EFGH.E'F'G'H' có cạnh là ka = b.

Do đó hai hình lập phương EFGH.E'F'G'H' và MNPQ.M'N'P'Q' có cùng cạnh b nên bằng nhau.

Vậy hai hình lập phương ABCD.A'B'C'D' và MNPQ.M'N'P'Q' đồng dạng.

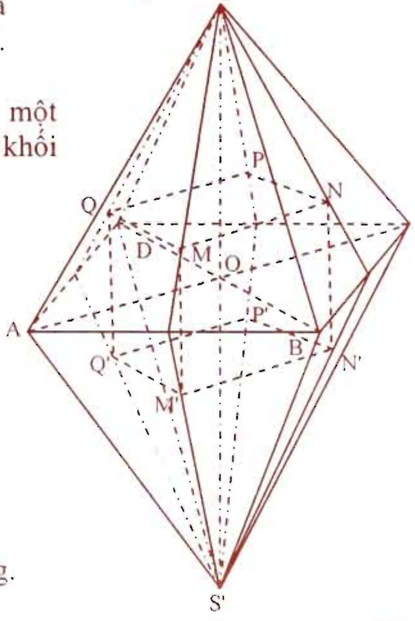
**Ví dụ 13**: Cho một khối tứ diện đều. Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.



**Giải**

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của khối tứ diện đều ABCD. Khi đó, tám tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NSP là những tam giác đều, chúng làm thành khối đa diện với các đỉnh là M, N, P, Q, R, S mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của bốn cạnh. Vậy đó là khối tám mặt đều.

**Ví dụ 14**: Chứng minh tâm các mặt của một khối tám mặt đều là các đỉnh của một khối lập phương.



**Giải**

Cho khối tám mặt đều SABCDS'.

Gọi M, N, P, Q, M', N', P', Q' lần lượt là trọng tâm của các mặt SAB, SBC, SCD, SAD, S'AB, S'BC, S'CD, S'DA thì các tứ giác MNPQ, M'N'P'Q', MNN'M', PQQ'P' NPP'N', MQQ'M' đều là hình vuông và mỗi đỉnh M, N, P, Q, M', N', P' Q' đều là đỉnh chung của 3 cạnh.

Vậy MNPQ.M'N'P'Q' là khối lập phương.

ABC

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Hãy chia một khối tứ diện thành sáu khối tứ diện bằng ba mặt phẳng.

**Bài 2:** Cho ba đoạn AA’ BB’, CC’ nằm trên 3 đường thẳng song song và không đồng phẳng sao cho : AA’ < BB’ < CC’ Hãy chia hình đa diện ABCA’B’C’ thành một hình chóp và một hình lăng trụ.

**HD:** qua mút của đoạn ngắn nhất, vẽ mặt phẳng song song với mặt đáy kia.

**Bài 3:** Hãy chia một khối hộp thành hai khối lăng trụ, bốn khối lăng trụ.

**Bài 4:** Hãy chia một khối hộp thành 4 khối chóp.

**HD:** có thể dùng các mặt chéo.

**Bài 5:** Chứng minh số cạnh của một khối đa diện lồi không nhỏ hơn 5.

**Bài 6:** Chứng minh trong một khối đa diện lồi thì tất cả các góc tam diện, góc tứ diện, …có đỉnh là đỉnh của khối đa diện đều lồi.

**HD:** dùng phản chứng.

**Bài 7:** Chứng minh phép đồng nhất e trong không gian là một phép dời hình.

**HD:** dùng định nghĩa.

**Bài 8:** Chứng minh phép dời hình biến một mặt cầu thành một mặt cầu bằng nó.

**Bài 9:** Chứng minh hợp thành các phép dời hình fog là một phép dời hình

**HD:** dùng định nghĩa.

**Bài 10:** Cho điểm I nằm trên đường thẳng d, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P). Chứng minh phép dời hình f biến (P) thành (P), d thành d và có một điểm bất động duy nhất I là phép đối xứng tâm I.

**Bài 11:** Chứng minh một phép tịnh tiến có thể xem là hợp thành của 2 phép đối xứng tâm bằng nhiều cách.

**Bài 12:** Dựng 4 điểm A, B, C, D trong không gian cho biết 4 trung điểm của 4 đoạn AB, BC, CD, DA lần lượt là I, J, K, L.

**Bài 13:** Dựng 5 điểm A, B, C, D, E trong không gian cho biết 4 trung điểm của 5 đoạn AB, BC, CD, DE, EA lần lượt là I, J, K, L, M.

**HD:** hợp thành của 5 phép đối xứng tâm là phép đối xứng tâm.

**Bài 14:** Cho hai cặp đường thẳng chéo nhau a và b, a’ và b’ có góc và khoảng cách giữa các cặp đường thẳng chéo nhau đó bằng nhau. Chứng minh có một phép dời hình biến đường thẳng a thành a’ và đường thẳng b thành b’

**HD:** gọi đoạn vuông góc chung AB và A’B’ từ đó dựng các tứ diện trên hai đường thẳng chéo nhau đã cho có cạnh tương ứng bằng nhau.

**Bài 15:** Trong không gian cho 4 đường thẳng a, b, a’ b’ sao cho a cắt b, a’ cắt b’ a // a’ b // b’ Tìm phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành a’ và đường thẳng b thành b’

**Bài 16:** Hợp thành của n phép đối xứng qua các n mặt song song là phép gì?

**ĐS:** n chẵn là phép tịnh tiến còn n lẻ là phép đối xứng qua mặt phẳng.

**Bài 17:** Cho vectơ $\vec{u}$ có giá song song với mặt phẳng (P). Phép hợp thành của phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}$ và phép đối xứng qua mặt phẳng (P) gọi là phép đối xứng trượt. Chứng minh rằng: Nếu phép đối xứng trượt biến M thành M’ thì các trung điểm của MM’ nằm trên một mặt phẳng cố định.

**Bài 18:** Hợp thành của n phép đối xứng trục qua các trục song song là phép gì?

**ĐS:** n chẵn là phép tịnh tiến còn n lẻ là phép đối xứng trục.

**Bài 19:** Chứng minh hợp thành của 3 phép đối xứng qua 3 mặt phẳng đôi một vuông góc là phép đối xứng tâm.

**Bài 20:** Cho tứ diện ABCD có các cạnh đối bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi A', B' là hình chiếu của A, B lên CD và C', D' là hình chiếu của C, D lên AB. Chứng minh đoạn A'C' = B'D' và A'D' = B'C'.

**HD:** dùng phép đối xứng trục

**Bài 21:** Tìm các trục đối xứng của hình bình hành, hình thang cân, hình thoi trong không gian.

**Bài 22:** Tìm các trục đối xứng của tam giác đều, tam giác cân trong không gian.

**Bài 23:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành và có SA = SC, SB = SD. Chứng minh đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm hình bình hành là trục đối xứng của hình chóp S.ABCD.

**Bài 24:** Cho tứ diện ABCD có diện tích hai tam giác ACD và BCD, ABC và ABD bằng nhau. Chứng minh tứ diện ABCD có trục đối xứng.

**HD:** trục đối xứng đi qua trung điểm của AB và CD.

**Bài 25:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Xét hình (H) gồm 3 đường thẳng AB, CC' và A'D' Chứng minh hình (H) có trục đối xứng

**Bài 26:** Cho hai đường thẳng d, d' và mặt phẳng (P). Dựng điểm A thuộc (P) và B thuộc d sao cho d' là trung trực của AB.

**HD:** dùng phép đối xứng qua trung trực của d'

**Bài 27:** Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d. Dựng hình lập phương ABCD.A'B'C'D' sao cho đường thẳng d đi qua tâm hai mặt song song của hình lập phương.

**Bài 28:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Trên đoạn AC và B'D' lấy hai điểm thay đổi M và N sao cho AM = D'N. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.

**Bài 29:** Cho tứ diện đều ABCD. Lấy điểm M bất kì trong tam giác ACD, gọi E là giao điểm của BM với mặt phẳng trung trực của AB. Chứng minh

$$EM + EA \geq AB\sqrt{\frac{2}{3}}$$

**HD:** dùng phép đối xứng qua mặt phẳng.

**Bài 30:** Tìm các mặt đối xứng của hình bình hành, hình thang cân, hình thoi trong không gian.

**Bài 31:** Tìm các mặt đối xứng của tam giác đều, tam giác cân trong không gian.

**Bài 32:** Chứng minh một hình (H) có đúng hai mặt phẳng đối xứng thì hai mặt phẳng đó phải vuông góc nhau.

**HD:** dùng định nghĩa.

ABC

**Bài 33:** Chứng minh một hình (H) có đúng một mặt phẳng đối xứng và một trục đối xứng thì trục đối xứng hoặc vuông góc với mặt phẳng đó hoặc thuộc mặt phẳng đó.

**Bài 34:** Chứng minh một hình (H) có đúng một mặt phẳng đối xứng và một tâm đối xứng thì tâm đối xứng phải thuộc mặt phẳng đó..

**Bài 35:** Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng qua đường thẳng d. Với điểm M bất kì thuộc (R), gọi M’ là ảnh của M qua phép đối xứng mặt phẳng (P), gọi M” là ảnh của M’ qua phép đối xứng mặt phẳng (Q). Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MM”

**HD:** mặt phân giác.

**Bài 36:** Cho góc xOy, tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho tia OM hợp với các tia Ox, Oy những góc bằng nhau.

**HD:** mặt đối xứng biến góc xOM thành góc yOM

**Bài 37:** Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) sao MA + MB bé nhất.

**HD:** xét hai trường hợp A, B cùng phía, khác phía đối với (P)

**Bài 38:** Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) sao $|MA - MB|$ lớn nhất.

**HD:** xét hai trường hợp A, B cùng phía, khác phía đối với (P)

**Bài 39:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ Tìm điểm M thuộc mp(A’B’C’D’) sao cho MA + MB + MC + MD bé nhất.

**Bài 40:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành và khoảng cách từ S đến (ABCD) không đổi. Tìm vị trí của S để hình chóp S.ABCD có diện tích xung quanh bé nhất.

**HD:** S thuộc mặt phẳng cố định song song với (ABCD).

**Bài 41:** Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Chứng minh mọi thiết diện có chu vi không bé hơn 2.

**HD:** dùng phép quay quanh trục là các cạnh tứ diện

**Bài 42:** Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh bằng 1. Chứng minh mọi thiết diện lục giác có chu vi không bé hơn $3\sqrt{2}$

**Bài 43:** Cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc d sao MA + MB bé nhất.

**Bài 44:** Cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc d sao $|MA - MB|$ lớn nhất.

**HD:** dùng phép quay quanh trục d để đưa điểm A, ảnh B’ và d thuộc một mặt phẳng.

**Bài 45:** Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P) mà đinh C nằm khác phía với 2 đinh A, B đối với mặt phẳng (P). Cho khảng cách từ A, B, C đến (P) lần lượt bằng a, b, c. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến (P).

**ĐS:** $\frac{a + b - c}{3}$

**Bài 46:** Trên mặt phẳng (P) cho đoạn CD = a, ngoài (P) cho 2 điểm A, B cùng phía đối với (P). Tìm vị trí đoạn CD sao cho AC + BD bé nhất.

**HD:** dùng phép tịnh tiến vectơ $\overline{CD}$.

**Bài 47:** Cho điểm O nằm ngoài hai mặt phẳng (P), (Q). Tìm điểm M thuộc (P) và N thuộc (Q) sao cho O là trung điểm của MN.

**HD:** dùng phép đối xứng tâm O.

**Bài 48:** Cho mặt cầu (S) và 4 điểm A, B, C, D  Mỗi điểm M thuộc (S) ta xác định điểm N sao cho $7\overline{MN} = 2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 4\overline{MC} + 5\overline{MD}$. Tìm tập hợp các điểm N.

**HD:** dùng tâm tỉ cự.

**Bài 49:** Cho 2 mặt cầu S(O; R) và S'(O'; R'). Tìm các phép vị tự biến mặt cầu này thành mặt cầu kia.

**Bài 50:** Chứng minh phép vị tự biến 2 đường thẳng chéo nhau thành 2 đường thẳng chéo nhau.

**Bài 51:** Cho tứ diện ABCD. Chứng minh bán kính mặt cầu đi qua trọng tâm 4 mặt không nhỏ hơn bán kính mặt cầu nội tiếp.

**Bài 52:** Cho tứ diện ABCD. Chứng minh bán kính mặt cầu ngoại tiếp không nhỏ hơn 3 lần bán kính mặt cầu nội tiếp.

**HD:** dùng phép vị tự tâm G là trọng tâm tứ diện và tỉ số $k = -1/3$.

**Bài 53:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'  Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của B'C', C'A'  A'B'  Chứng minh AM, BN, CP đồng quy.

**HD:** dùng phép vị tự.

**Bài 54:** Cho 3 tia Ox, Oy, Oz và đường thẳng d. Ba điểm thay đổi A, B, C lần lượt trên 3 tia đó sao cho mp(ABC) vuông góc với d. Tìm tập hợp trọng tâm G, trực tâm H của tam giác ABC.

**Bài 55:** Cho 3 tia Ox, Oy, Oz và 3 điểm A, B, C lần lượt trên 3 tia đó. Lấy điểm M thuộc tam giác ABC, tìm vị trí A, B, C để M là trọng tâm tam giác ABC.

**HD:** dùng phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$.

**Bài 56:** Cho 2 hình chóp tam giác đều S.ABC và S'.A'B'C'  Chứng minh nếu góc ASB bằng góc A'S'B' thì 2 hình chóp đồng dạng.

**Bài 57:** Cho 2 hình chóp tứ giác đều S.ABCD và S'.A'B'C'D'  Chứng minh nếu $\frac{SA}{S'A'} = \frac{AB}{A'B'}$ thì 2 hình chóp đồng dạng.

ABC

# §2. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

## A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

– Thể tích của khối đa diện: mỗi khối đa diện có thể tích là một số dương, thoả mãn ba tính chất sau đây:

(1) Hai khối đa diện bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

(2) Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của các khối đa diện nhỏ đó.

(3) Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1.

– Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích số của ba kích thước.

– Thể tích của một khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp đó.

– Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó.

**Chú ý:** Để đơn giản, thể tích của khối đa diện giới hạn bởi hình đa diện H cũng được gọi là thể tích của hình đa diện H.

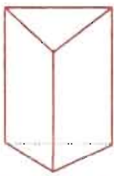
## B. PHÂN DẠNG TOÁN

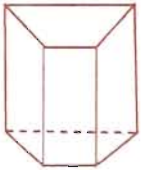
### DẠNG 1: KHỐI LĂNG TRỤ - KHỐI HỘP

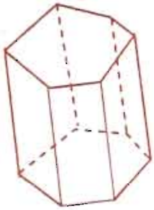
**Hình lăng trụ:** Có 2 đáy song song bằng nhau và các cạnh bên song song bằng nhau. Ta thường phân loại theo đa giác đáy: lăng trụ tam giác, tứ giác...

– Lăng trụ đứng khi cạnh bên vuông góc với đáy.

– Lăng trụ đều là lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.







– Thể tích khối lăng trụ: V = B. h.

**Hình hộp:** Là hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành.

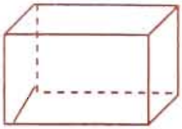
Hình hộp có 6 mặt là hình bình hành, 4 đường chéo đồng qui tại tâm hình hộp.

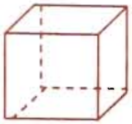
– Hình hộp chữ nhật: hộp đứng và có đáy là hình chữ nhật.

Gọi a, b, c là 3 kích thước thì có đường chéo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ diện tích toàn phần: $S = 2(ab + bc + ca)$ và thể tích khối hộp chữ nhật: $V = abc$.

– Hình lập phương: hình hộp chữ nhật có 3 kích thước bằng nhau.

**Chú ý:** Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất ta có thể dùng bất đẳng thức Côsi hoặc dùng đạo hàm.

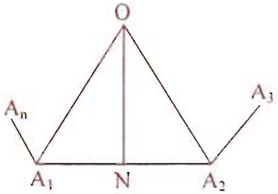




**Ví dụ 1**: Tính thể tích của khối lăng trụ n-giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

**Giải**

Gọi $A_1A_2...A_n$ là đáy của khối lăng trụ đều và O là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Hạ $ON \perp A_1A_2$. Ta có:



$$ON = A_1N\cot\widehat{NOA_1} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$$

Do đó diện tích đáy của khối lăng trụ đều là:

$$S = n.S_{OA_1A_2} = n.\frac{1}{2}A_1A_2.ON = \frac{1}{4}na^2\cot\frac{\pi}{n}$$

Vì lăng trụ đã cho là lăng trụ đều nên chiều cao của nó bằng cạnh bên: h = a.

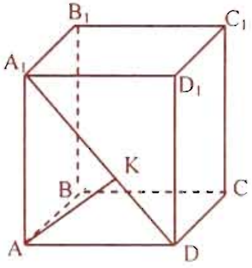
Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V = S.\,h = \frac{1}{4}na^3\cot\frac{\pi}{n}$

**Ví dụ 2**: Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A_1D$ bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5.

a) Hạ $AK \perp A_1D$ ($K \in A_1D$). Chứng minh rằng: AK = 2.

b) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

**Giải**



a) $AB \,//\, A_1B_1 \Rightarrow AB \,//\, (A_1B_1D)$

$\Rightarrow d(A, (A_1B_1D)) = d(AB, A_1D)$

Ta có $A_1B_1 \perp (AA_1D_1D)$

$\Rightarrow A_1B_1 \perp AK$.

Mặt khác: $A_1D \perp AK \Rightarrow AK \perp (A_1B_1D)$.

Vậy $AK = d(A, (A_1B_1D)) = d(AB, A_1D) = 2$.

b) Xét tam giác vuông $A_1AD$, ta có: $AK^2 = A_1K.KD$

Đặt $A_1K = x \Rightarrow 4 = x(5 - x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Với x = 1, $AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = 2\sqrt{5}$, $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{5}$

Khi đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 20\sqrt{5}$

Với x = 4, tương tự ta có : $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 10\sqrt{5}$

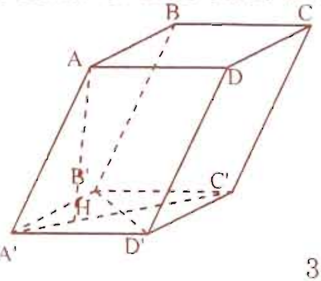
**Ví dụ 3**: Tính thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D', biết rằng AA'B'D' là khối tứ diện đều cạnh a.

**Giải**

Vì AA'B'D' là tứ diện đều nên đường cao AH của nó có hình chiếu H là tâm của tam giác đều A'B'D' Suy ra:

$$A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Ta có đáy A'B'C'D' là hình thoi có góc B'A'D' bằng $60^o$ nên:

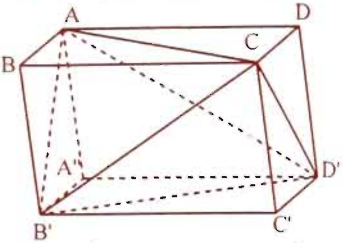


ABC

$$S_{A'B'C'D'} = A'B' . A'D'\sin60^{o} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Vậy thể tích khối hộp đã cho là: $V = S . h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\,\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

**Ví dụ 4**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích V  Hãy tính thể tích của tứ diện ACB'D'.

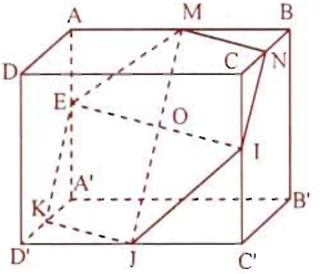


### Giải

Các tứ diện BACB', C'B'CD', DD'AC, A'AB'D' đều có thể tích bằng $\frac{V}{6}$

Do đó: $V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{V}{6} = \frac{V}{3}$

**Ví dụ 5**: Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D'  Chứng minh rằng sáu trung điểm của sáu cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A' và A'A nằm trên một mặt phẳng và mặt phẳng đó chia khối hộp thành hai phần có thể tích bằng nhau.



### Giải

Gọi M, N, I, J, K, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A', A'A của khối hộp ABCD.A'B'C'D', còn O là giao điểm của các đường chéo của khối hộp.

Ta có ba đường thẳng MN, EI và KJ đôi một song song và chúng lần lượt đi qua ba điểm thẳng hàng M, O, J nên ba đường thẳng đó đồng phẳng.

Vậy sáu điểm M, N, I, J, K, E cùng nằm trên một mặt phẳng ($\alpha$).

Mặt phẳng ($\alpha$) chia khối hộp thành hai khối đa diện, khối thứ nhất có các đỉnh là M, N, I, J, K, E, A, C, D, D'; khối thứ hai có các đỉnh là M, N, I, J, K, E, C', A', B, B'. Phép đối xứng qua điểm O biến tập hợp đỉnh của khối đa diện thứ nhất thành tập hợp đỉnh của khối đa diện thứ hai.

Vậy hai khối đa diện đó bằng nhau và do đó có thể tích bằng nhau.

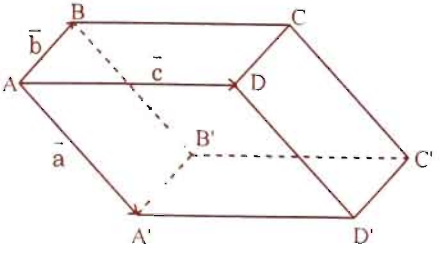
**Ví dụ 6**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng d và ba góc của đỉnh A đều bằng 60°

a) Tính độ dài các đường chéo và thể tích V của hình hộp.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt song song của hình hộp.

c) Có thể cắt hình hộp bằng một mặt phẳng sao cho thiết diện nhận được là một hình vuông?

### Giải



a) Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ thì

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{d^2}{2}$$

Ta có: $\overrightarrow{AC'}^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$

$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{c}.\vec{a} = 6d^2$

Suy ra: $AC' = d\sqrt{6}$ và

Ta có: $\overrightarrow{BD'}^2 = (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{c}.\vec{a} = 2d^2$

Suy ra $BD' = d\sqrt{2}$.

Tương tự $DB' = CA' = d\sqrt{2}$ nên ta có AA'BD là hình tứ diện đều cạnh d,

nên: $V_{(AA'BD)} = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{12}$ ,do đó $V = 6V_{AA'BD} = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{12}$

b) Gọi h là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D') thì

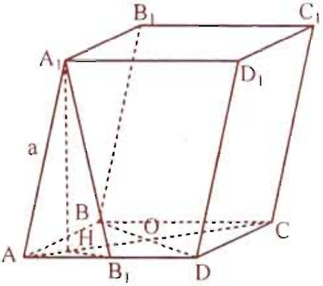
$$V = S_{ABCD}.h = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{d\sqrt{6}}{2}$$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt song song nào cũng bằng $\dfrac{d\sqrt{6}}{2}$.

c) Hình bình hành BCD'A' có các cạnh bằng d, và hai đường chéo bằng $d\sqrt{2}$ nên nó là hình vuông. Vậy hình hộp có thiết diện BCD'A' là hình vuông. Tương tự thiết diện CDA'B' cũng là hình vuông.

**Ví dụ 7**: Cho khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a, $\widehat{A_1AB} = \widehat{BAD} = \widehat{A_1AD} = \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Hãy tính thể tích của khối hộp.

**Giải**



Hạ $A_1H \perp AC$ $(H \in AC)$.

Tam giác $A_1BD$ cân (do $A_1B = A_1D$) suy ra $BD \perp A_1O$. Mặt khác $BD \perp AC$ $\Rightarrow BD \perp (A_1AO) \Rightarrow BD \perp A_1H$.

Do đó $A_1H \perp (ABCD)$.

Đặt $\widehat{A_1AD} = \varphi$

Hạ $A_1K \perp AD \Rightarrow HK \perp AK$. Ta có:

$$\cos\varphi.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA_1}.\frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA_1} = \cos\alpha \quad \text{nên } \cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Do đó: $A_1H = a\sin\varphi = a\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$

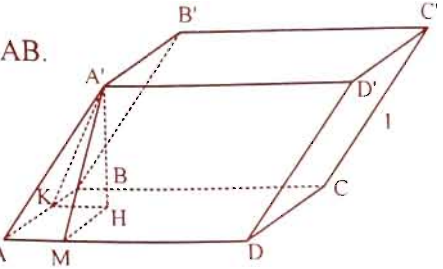
$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AB.AD.\sin\alpha.A_1H = a^2\sin\alpha.\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$$

$$= 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

**Ví dụ 8**: Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60°. Hãy tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.

ABC

### Giải



Hạ A'H ⊥ (ABCD), HM ⊥ AD, HK ⊥ AB.

Ta có: AD ⊥ A'M, AB ⊥ A'K

$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 60^o \quad \widehat{A'KH} = 45^o$

Đặt A'H = x.

Khi đó: $A'M = x : \sin 60^o = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

$$AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} = HK$$

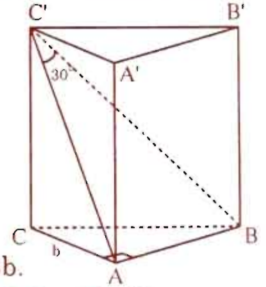
mà $HK = x\cot 45^o = x$ nên $x = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AD \quad AB \quad x = \sqrt{7}.\sqrt{3}.\sqrt{\frac{3}{7}} = 3$

**Ví dụ 9:** Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AC = b, $\widehat{ACB} = 60^o$ Đường thẳng BC' tạo với mp(AA'C'C) một góc $30^o$

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

b) Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



### Giải

a) Ta có BA ⊥ AC, BA ⊥ AA' nên BA ⊥ (ACC'A').
Vậy AC' là hình chiếu của BC' trên mp(ACC'A').
Do đó góc BC'A bằng $30^o$ nên:
$AC' = AB\cot 30^o = AC\tan 60^o\cot 30^o = b\sqrt{3} \quad \sqrt{3} = 3b.$

b) Ta có: $CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2$. Do đó $CC' = 2b\sqrt{2}$.
Vậy thể tích của khối lăng trụ là:

$$V = S.h = \frac{1}{2}AB.AC.CC' = \frac{1}{2}b\sqrt{3}.b.2b\sqrt{2} = b^3\sqrt{6}$$

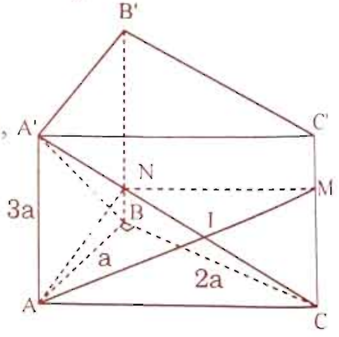
**Ví dụ 10:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có mặt đáy là tam giác ABC vuông tại B và AB = a, BC = 2a, AA' = 3a. Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với CA' lần lượt cắt các đoạn thẳng CC' và BB' tại M và N.

a) Tính thể tích khối chóp C.A'AB.

b) Chứng minh rằng AN ⊥ A'B và tính diện tích tam giác AMN.

### Giải

a) $V_{C.A'AB} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC.AA'} = \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3$



b) Ta có: CB ⊥ AB, CB ⊥ AA' (do AA' ⊥ (ABC)),
suy ra CB ⊥ (A'AB).
Mặt khác AN ⊥ CA' suy ra AN ⊥ A'B.

Ta có: $V_{A'AMN} = \frac{1}{3}S_{AMN} . A'I$

Vì NB // AA', MC // (AA'B) $\Rightarrow V_{A'AMN} = V_{M.AA'N} = V_{M.AA'B} = V_{C.AA'B} = a^3$

Và $A'I \,.\, A'C = A'A^2 \Rightarrow A'I = \dfrac{(3a)^2}{\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2}} = \dfrac{9a}{\sqrt{14}}$

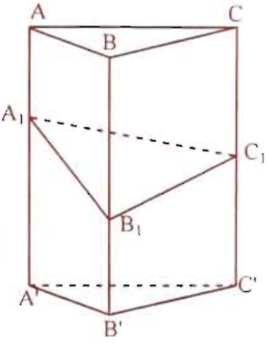
Vậy: $S_{AMN} = \dfrac{3.V_{A'.AMN}}{A'I} = \dfrac{a^2\sqrt{14}}{3}$

**Ví dụ 11**: Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S và AA' = h. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại $A_1$, $B_1$ và $C_1$. Biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

a) Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mặt phẳng (P).

b) Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau.

### Giải



a) Ta có: $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BCC_1B_1}$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}S_{BCC_1B_1}d(A_1,(BCC_1B_1))$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(b+c).BC.d(A,BC)$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}(b+c)S = \frac{1}{3}(a+b+c)S$$

$$V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = V_{A_1B_1C_1.ABC} - V_{ABC.A_1B_1C_1}$$

$$= Sh - \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{3}(3h-a-b-c)S$$

b) Điều kiện $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(a+b+c)S = \dfrac{1}{2}Sh$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c) = 3h.$

**Ví dụ 12**: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng d. Hãy tính:

a) Khoảng cách từ điểm A tới đường thẳng B'C và góc hợp bởi hai đường thẳng A'B và B'C.

b) Thể tích tứ diện A'BB'C và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C.

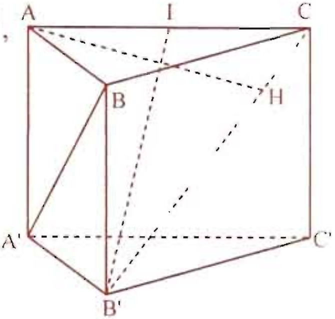
### Giải

a) Tam giác AB'C là tam giác cân $B'C = B'A = d\sqrt{2}$, AC = d, gọi B'I và AH là các đường cao.

Ta có AH  B'C = AC.B'I $\Rightarrow AH.d\sqrt{2} = d.B'I$

Vậy $AH = \dfrac{B'I}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{B'C^2 - IC^2}}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{14}}{4}$$



ABC

Đặt $\overline{AA'} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$ $\overline{AC} = \overline{c}$ thì $\overline{b}.\overline{c} = |\overline{b}|\,|\overline{c}|\,\cos 60^o = \frac{d^2}{2}$

Ta có: $\overline{A'B}.\overline{B'C} = \left(\overline{b} - \overline{a}\right).(\overline{c} - \overline{a} - \overline{b}) = \frac{d^2}{2} - d^2 + d^2 = \frac{d^2}{2}$

Do đó $\cos(\overline{A'B}, \overline{B'C}) = \frac{\overline{A'B}.\overline{B'C}}{A'B.B'C} = \frac{\frac{d^2}{2}}{2d^2} = \frac{1}{4}$

Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng A'B và B'C thì $\cos\varphi = \left|\cos(\overline{A'B}, \overline{B'C})\right| = \frac{1}{4}$

b) Xem tứ diện A'BB'C là hình chóp có đỉnh A' và đáy là tam giác BB'C thì diện tích đáy là $\frac{d^2}{2}$ còn đường cao chính là khoảng cách từ A' tới mp(BCC'B') nên bằng $\frac{d\sqrt{3}}{2}$ Vậy: $V_{ABB'C} = \frac{1}{3}.\frac{d^2}{2}\,\frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{d^3\sqrt{3}}{12}$

Gọi h là khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C thì

$V_{(A'BB'C)} = \frac{1}{6}A'B.B'C.h.\sin\varphi$, suy ra: $\frac{d^3\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{6}d\sqrt{2}.d\sqrt{2}.h\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

Từ đó ta tính được: $h = \frac{d\sqrt{5}}{5}$

**Ví dụ 13**: Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Hãy tính:

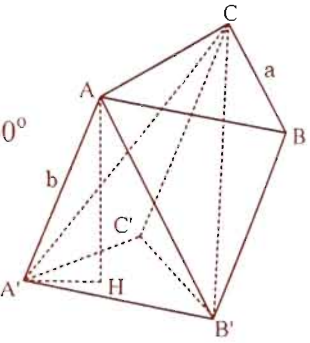
a) Tỉ số $\frac{V_{ACA'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}}$

b) Tính thể tích tứ diện ACA'B' biết tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a, AA' = b và AA' tạo với mặt phẳng (A'B'C') một góc bằng $60^o$

**Giải**

a) Ta có: $V_{A.CA'B'} = V_{B'.AA'C} = V_{B'.CA'C'} = V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Do đó $\frac{V_{A.CA'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$



b) Gọi H là chân đường cao đi qua A của lăng trụ.
Khi đó góc (AA', A'B'C')) = góc (AA', A'H) = $60^o$

$AH = b.\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Do đó $V_{ABC.A'B'C} = AH.S_{A'B'C'} = \frac{3}{8}a^2b$

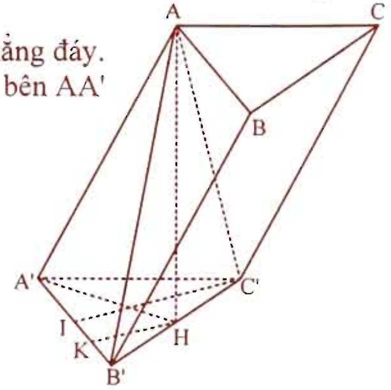
Vậy $V_{ACA'B'} = \frac{1}{8}a^2b$.

**Ví dụ 14**: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đáy đều bằng a, góc tạo thành bởi cạnh bên và mặt đáy là $60^o$ và hình chiếu H của đỉnh A lên mp(A'B'C') trùng với trung điểm của cạnh B'C'

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy và góc giữa hai đường thẳng BC và AC'.

b) Tính góc giữa mp(ABB'A') và mặt đáy và tính thể tích của khối lăng trụ.

**Giải**



a) Ta có AH là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Vì A'H là hình chiếu vuông góc của cạnh bên AA' trên mặt phẳng đáy nên $\widehat{AA'H} = 60^o$

Trong tam giác AA'H có:

$$AH = A'H\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

Góc giữa BC và AC' là $AC'B'$

Trong tam giác vuông AHC' có:

$$\tan\widehat{AC'B'} = \frac{AH}{HC'} = \frac{3a}{2} : \frac{a}{2} = 3$$

b) Từ H hạ HK ⊥ A'B'. Ta có HK là hình chiếu của AK trên mặt phẳng (A'B'C'). Suy ra AK ⊥ A'B'.

Vậy góc giữa mặt phẳng (ABB'A') và mặt phẳng (A'B'C') là $\widehat{AKH}$.

Gọi I là trung điểm của A'B', ta có C'I ⊥ A'B', suy ra CI // HK.

Vì H là trung điểm của B'C' nên HK là đường trung bình của tam giác B'C'I, suy ra $HK = \frac{CI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Trong tam giác vuông AKH có: $\tan AKH = \frac{AH}{HK} = \frac{3a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$

Ta có thể tích khối lăng trụ là:

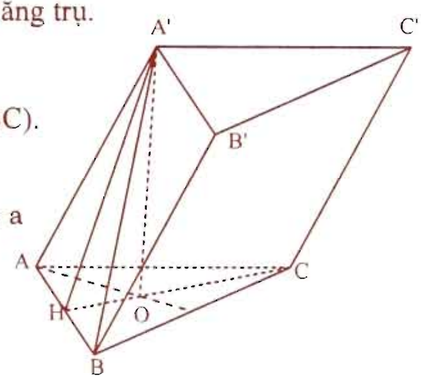
$$V = S_{A'B'C'}\ AH = \frac{1}{2}B'C'.A'H.AH = \frac{3a}{2}.\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$$

**Ví dụ 15:** Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C, cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc $60^o$.

a) Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

b) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

**Giải**



a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Vì A'A = A'B = A'C nên A'O ⊥ mp(ABC).

Do đó $\widehat{A'AO} = 60^o$ Ta có:

$$A'O = AO\tan 60^o = AO\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$$

Vậy thể tích cần tìm là:

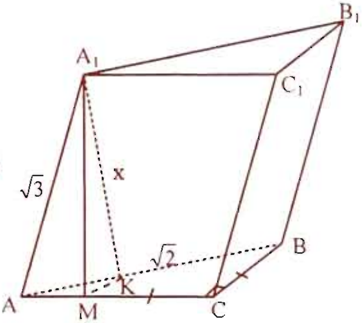
$$V = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

b) Vì BC ⊥ AO nên BC ⊥ AA' hay BC ⊥ BB' nên BB'C'C là hình chữ nhật. Gọi H là trung điểm của AB. Ta có:

$$S_{xq} = 2S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} = 2A'H.AB + BB'.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{13}+2).$$

**Ví dụ 16**: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền AB bằng $\sqrt{2}$. Mặt phẳng $(AA_1B)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AA_1 = \sqrt{3}$, góc $\widehat{A_1AB}$ nhọn và mặt phẳng $(A_1AC)$ tạo một góc $60^o$ với mặt phẳng (ABC). Hãy tìm thể tích khối lăng trụ.

**Giải**



Hạ $A_1K \perp AB$ ($K \in AB$).

K thuộc đoạn AB vì $\widehat{A_1AB}$ nhọn.

Hạ $KM \perp AC$

$\Rightarrow A_1M \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc)

Ta có $A_1K \perp (ABC)$ vì $(AA_1B) \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{A_1MK} = 60^o$

Đặt $A_1K = x$, ta có:

$$AK = \sqrt{A_1A^2 - A_1K^2} = \sqrt{3-x^2}$$

$$MK = AK\sin\widehat{KAM} = \sqrt{3-x^2}\sin 45^o = \sqrt{3-x^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mặt khác, $MK = A_1K.\cot 60^o = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2(3-x^2)}}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

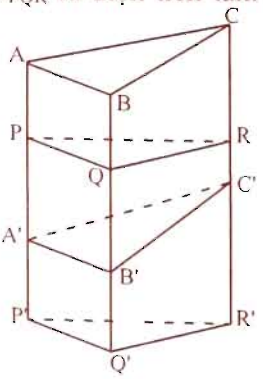
$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = S_{ABC}.A_1K = \frac{1}{2}AC.CB.A_1K = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

**Ví dụ 17**: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' với cạnh bên không vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên của hình lăng trụ và cắt chúng tại P, Q, R. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overline{AA'}$ biến tam giác PQR thành tam giác P'Q'R'.

a) Chứng minh rằng thể tích V của hình lăng trụ đã cho bằng thể tích của hình lăng trụ PQR.P'Q'R'.

b) Chứng minh rằng $V = S_{PQR}.AA'$, trong đó $S_{PQR}$ là diện tích tam giác PQR.

**Giải**



a) Mặt phẳng (PQR) chia khối lăng trụ ABC.A'B'C' thành hai khối đa diện $H_1$ và $H_2$, trong đó $H_1$ chứa tam giác ABC còn $H_2$ chứa tam giác A'B'C'. Mặt phẳng (A'B'C') chia khối lăng trụ PQR.P'Q'R' thành hai khối đa diện $H_2$ và $H_3$ trong đó $H_3$ chứa tam giác P'Q'R'.

Gọi $V_1, V_2, V_3$ lần lượt là thể tích của các khối đa diện $H_1, H_2, H_3$, ta có:

$V_{ABC.A'B'C'} = V_1 + V_2 \quad V_{PQR.P'Q'R'} = V_2 + V_3$

Vì phép tịnh tiến theo vectơ $\overline{AA}'$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' và biến tam giác PQR thành tam giác P'Q'R' nên khối đa diện $H_1$ biến thành khối đa diện $H_3$, vì vậy ta có $V_1 = V_3$.

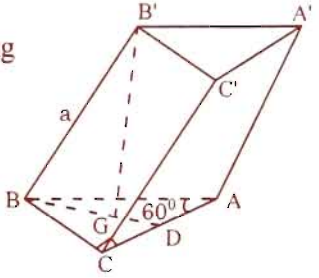
Từ đó suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'}$

b) Vì lăng trụ PQR.P'Q'R' là lăng trụ đứng có chiều cao PP' = AA' nên:

$V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'} = S_{PQR}.AA'$.

**Ví dụ 18**: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa BB' và mp(ABC) bằng $60^o$; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^o$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mp(ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích tứ diện A'ABC.

**Giải**



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm AC thì B'G ⊥ (ABC),

$\widehat{B'BG} = 60^o$ nên $B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}. BG = \frac{a}{2}$.

Do đó $BD = \frac{3a}{4}$

Đặt AB = x thì $BC = \frac{x\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{x}{2}. CD = \frac{x}{4}$

Tam giác BCD vuông tại C nên:

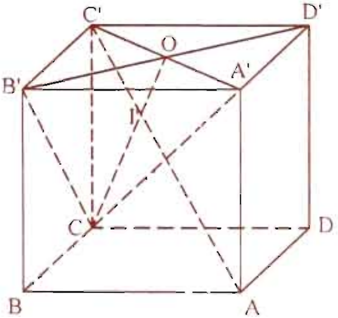
$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^2 = \frac{9}{16}a^2 \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{13}}{13} = AB$$

và $AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26}$, do đó $S_{ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$

$$V_{A'ABC} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.B'G = \frac{9a^3}{208}$$

**Ví dụ 19**: Cho hình lập phương cạnh a, hãy tính thể tích của tứ diện đều có 2 đỉnh nằm trên một đường chéo của hình lập phương và 2 đỉnh còn lại nằm trên 1 đường chéo của 1 mặt bên.

**Giải**



Trong một tứ diện đều, đoạn nối hai trung điểm của hai cạnh đối là đoạn vuông góc chung của hai cạnh đó.

Giả sử tứ diện đều có hai đỉnh nằm trên đường chéo AC' và hai đỉnh còn lại nằm trên đường chéo B'D' của mặt bên nên đoạn vuông góc chung của hai cạnh đối diện của tứ diện chính là đoạn vuông góc chung của AC' và B'D'.

Gọi O là giao điểm của A'C' và B'D'; I là giao điểm của AC' với CO thì OI là đường vuông góc chung của AC' và B'D'.

Vì I là trọng tâm của tam giác đều CB'D' cạnh $a\sqrt{2}$ nên:

$$OI = \frac{1}{3}CO = \frac{1}{3}a\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vì đoạn vuông góc chung của hai cạnh đối trong tứ diện đều cạnh b bằng $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ nên $\frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

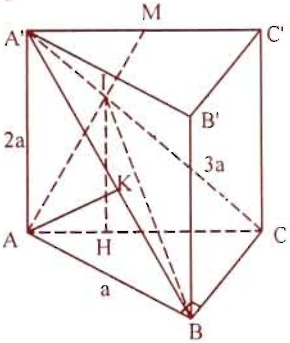
Thể tích tứ diện đều đó là: $V = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{3}\ \frac{a\sqrt{3}}{3}\ \frac{a\sqrt{6}}{6}\sin 90^\circ = \frac{a^3\sqrt{6}}{108}$

**Ví dụ 20:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

**Giải**

a) Hạ IH $\perp$ AC (H $\in$ AC) $\Rightarrow$ IH $\perp$ (ABC) nên IH là đường cao của tứ diện IABC.

$$\Rightarrow IH \,//\, AA' = \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA = \frac{4a}{3}$$



$$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$

Thể tích khối đa diện IABC:

$$V = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} = \frac{4a^3}{9}$$

b) Hạ AK $\perp$ A'B (K $\in$ A'B). Vì BC $\perp$ (ABB'A') nên AK $\perp$BC $\Rightarrow$ AK $\perp$ (IBC).

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK.

$$AK = \frac{2S_{A\ A'B}}{A'B} = \frac{AA\ .AB}{\sqrt{A\ A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

**Ví dụ 21:** Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy, SO = h. Một lăng trụ tam giác đều có đáy dưới nằm trên đáy hình chóp, ba đỉnh của đáy nằm trên ba cạnh bên hình chóp.

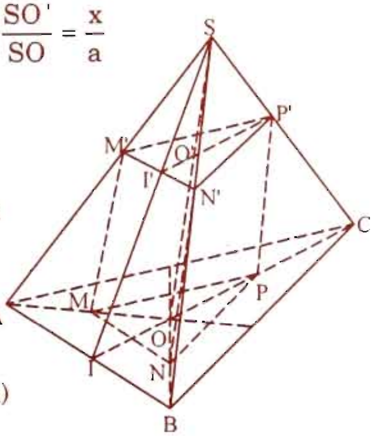
a) Tính cạnh đáy lăng trụ khi mặt bên là hình vuông.

b) Tính thể tích lớn nhất của lăng trụ khi a, h không đổi.

**Giải**

a) Gọi MNP.M'N'P' là lăng trụ, x là chiều dài cạnh đáy.

I trung điểm của AB, SI $\cap$ M'N' = I'



Ta có $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $P'I' = \frac{x\sqrt{3}}{2}.\frac{I'P'}{IC} = \frac{SO'}{SO} \Rightarrow \frac{SO'}{SO} = \frac{x}{a}$

$\Rightarrow \frac{SO - SO'}{SO} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow OO' = \frac{h}{a}(a - x)$

Khi lăng trụ có mặt bên là hình vuông ta có:

$$OO' = x \Leftrightarrow \frac{h}{a}(a - x) = x \Leftrightarrow ah - hx = ax$$

Suy ra cạnh đáy $x = \frac{ah}{a + h}$

b) Thể tích lăng trụ:

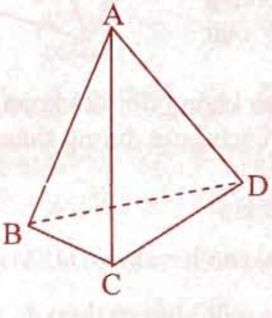
$$V = B.h = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\ \frac{h}{a}(a - x) = \frac{h\sqrt{3}}{4a}x^2(a - x)$$

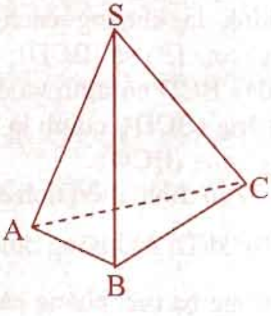
Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$x^2(a - x) = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}(a - x) \le 4.\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + a - x}{3}\right)^3 = \frac{4a^3}{27}$$

Vậy $V_{max} = \frac{a^3h\sqrt{3}}{27}$ khi $x = \frac{2}{3}a$.

## DẠNG 2: KHỐI CHÓP TAM GIÁC - TỨ DIỆN





– Tứ diện ABCD: bốn mặt là tam giác.

– Tứ diện đều khi có 6 cạnh bằng nhau

– Hình chóp tam giác S.ABC.

– Hình chóp đều: đáy đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Trung đoạn của hình chóp đều là đoạn nối đỉnh với trung điểm của cạnh đáy.

– Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}B.h$

– Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{3} S_{BCD}.AH$

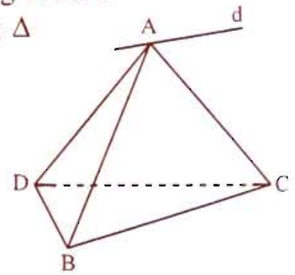
- **Chú ý:**

1) Tứ diện hay hình chóp tam giác có 4 cách chọn đỉnh chóp.
2) Tứ diện nội tiếp hình hộp, tứ diện gần đều (có 3 cặp cạnh đối bằng nhau) nội tiếp hình hộp chữ nhật và tứ diện đều nội tiếp hình lập phương.
3) Hình chóp đều thì hình chiếu của đỉnh chóp là tâm của đáy.
4) Khi tính toán các đại lượng, nếu cần thì đặt ẩn rồi tìm phương trình để giải ra ẩn đó.
5) Để tính diện tích, thể tích có khi ta tính gián tiếp bằng cách chia nhỏ các phần hoặc lấy phần lớn hơn trừ đi các phần dư hoặc dùng tỉ số diện tích, tỉ số thể tích:

$$\frac{S(AB'C')}{S(ABC)} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}; \quad \frac{V(S.A'B'C')}{V(S.ABC)} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

__Ví dụ 1__: Cho tứ diện ABCD. Chứng minh thể tích tứ diện không đổi trong các trường hợp:

a) Đỉnh A di chuyển trên mặt phẳng (P) song song với (BCD).
b) Đỉnh A di chuyển trên đường thẳng d song song với BC.
c) Hai đỉnh B và C di chuyển trên đường thẳng Δ nhưng vẫn giữ nguyên độ dài.



**Giải**

Thể tích tứ diện ABCD không đổi vì:

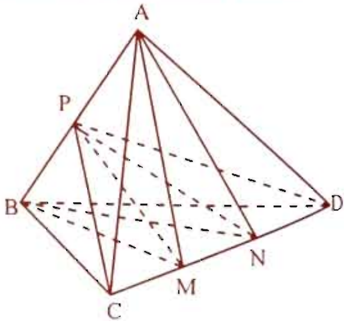
a) Tam giác đáy BCD cố định và đường cao không đổi là khoảng cách từ A mặt phẳng (BCD), chính là khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song (P) và (BCD).

b) Tam giác đáy BCD cố định và đường cao không đổi là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD), chính là khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng song song (BCD).

c) Đỉnh A và D cố định, diện tích đáy BCD là:

$S = \frac{1}{2} BC.d(D, \Delta)$ không đổi và chiều cao $h = d(A, (D, \Delta))$ không đổi.

__Ví dụ 2__: Hãy dùng ba mặt phẳng cắt để chia một khối tứ diện đã cho thành 6 khối tứ diện có thể tích bằng nhau.



**Giải**

Giả sử khối tứ diện đã cho là ABCD. Gọi P là trung điểm AB. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh CD sao cho CM = MN = ND. Các mặt phẳng: (CDP), (ABM), (ABN) chia khối tứ diện ABCD thành 6 khối tứ diện có thể tích bằng nhau.

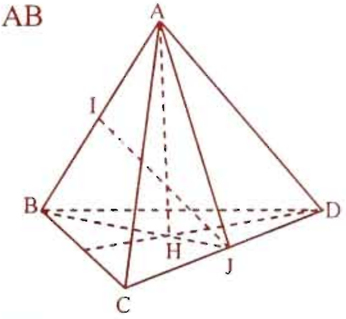
Đó là các khối tứ diện: BPCM, BPMN, BPND, PACM, PAMN và PAND.

**Ví dụ 3**: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện và thể tích của hình tứ diện đều đó.

**Giải**

Do tứ diện ABCD đều, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì:

$AJ = BJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\Delta JAB$ cân tại $J \Rightarrow IJ \perp AB$



Tương tự $\Delta ICD$ cân đỉnh I nên: $IJ \perp CD$

Vậy $IJ = d(AB, CD)$

Trong tam giác vuông IAJ

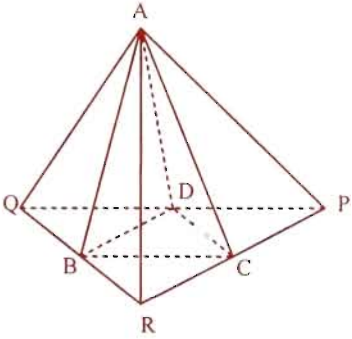
$$IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Tương tự $d(BC, AD) = d(BD; AC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

**Ví dụ 4**: Tính thể tích khối tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau: AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.

**Giải**



Dựng tứ diện APQR sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm các cạnh QR, RP, PQ.

Ta có $AD = BC = \dfrac{1}{2}PQ \Rightarrow AD = \dfrac{1}{2}PQ$ mà D là trung điểm của PQ

$\Rightarrow AQ \perp AP$ Chứng minh tương tự, ta cũng có $AQ \perp AR$, $AR \perp AP$.

Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{4}V_{APQR} = \dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{6}.AP.AQ.AR$

Xét các tam giác vuông APQ, AQR, ARP ta có:

$$AP^2 + AQ^2 = 4c^2,\ AQ^2 + AR^2 = 4a^2,\ AR^2 + AP^2 = 4b^2$$

Từ đó suy ra:

$$AP = \sqrt{2}.\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2},\ AQ = \sqrt{2}.\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$$

$$AR = \sqrt{2}.\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

Vậy: $V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2).(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$

**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD, gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD, α là góc giữa hai đường thẳng đó.

Chứng minh rằng: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.\ d.\sin\alpha$

**Giải**

Trong mặt phẳng (ABC) vẽ hình bình hành CBAA':

Ta có AA'//BC nên $V_{ABCD} = V_{A'BCD}$

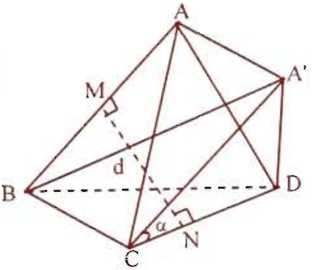
Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD với $M \in AB$, $N \in CD$.

Vì BM // CA' nên $V_{BA'CD} = V_{MA'CD}$

Ta có: $MN \perp AB$ nên $MN \perp CA'$.

Ngoài ra $MN \perp CD$, nên $MN \perp mp(CDA')$.

Ta có: g(AB,CD) = g(A'C, CD) = $\alpha$, do đó:



$$V_{MA'CD} = \frac{1}{3} S_{A'CD.MN} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} CA',CD.\sin\alpha.MN = \frac{1}{6} AB.CD.d.\sin\alpha$$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d.\sin\alpha$.

**Ví dụ 6:** Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có chiều cao bằng h và góc ASB bằng $2\varphi$. Hãy tìm thể tích khối chóp.

**Giải**

Giả sử O là tâm tam giác đều ABC. Khi đó $SO \perp (ABC)$ và SO = h.

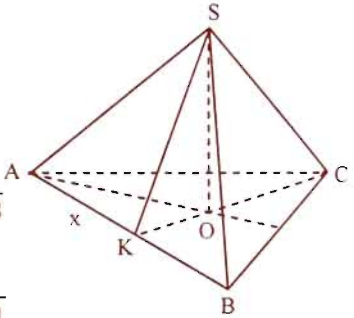
Gọi K là trung điểm của AB. Đặt AK = x.

Khi đó $SK = x\cot\varphi \quad OK = x\tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Ta có $h^2 = SK^2 - OK^2 = \frac{x^2}{3}(3\cot^2\varphi - 1)$ nên

$x^2 = \frac{3h^2}{3\cot^2\varphi - 1}$. $S_{ABC} = \frac{AB^2 \sin 60^\circ}{2} = x^2\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.h = \frac{x^2\sqrt{3}}{3} h = \frac{h^3\sqrt{3}}{3\cot^2\varphi - 1}$



**Ví dụ 7**: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

**Giải**

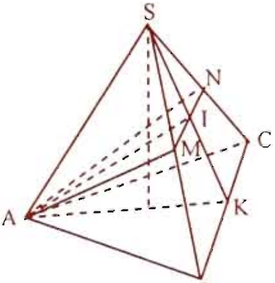
Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$.

Từ giả thiết suy ra $MN = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$, MN // BC,

suy ra I là trung điểm của SK và MN.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC$ nên hai trung tuyến tương ứng AM = AN, do đó $\Delta AMN$ cân tại A, suy ra $AI \perp MN$.

Mà $(SBC) \perp (AMN) \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$.



Do đó $\Delta SAK$ cân tại A, suy ra $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ nên:

ABC

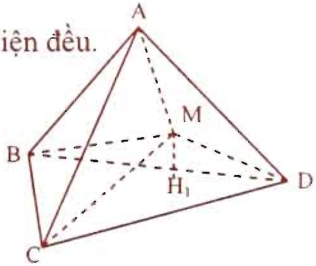
$$AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Vậy: $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt).

**Ví dụ 8:** Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a?.

**Giải**

Gọi h là chiều cao và S là diện tích các mặt tứ diện đều. Gọi $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Khi đó $MH_1$, $MH_2$, $MH_3$, $MH_4$ lần lượt là khoảng cách từ điểm M tới các mặt phẳng đó. Ta có:



$$V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} = V_{ABCD}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}S.MH_1 + \frac{1}{3}S.MH_2 + \frac{1}{3}S.MH_3 + \frac{1}{3}S.MH_4 = \frac{1}{3}S.h$$

$\Rightarrow MH_1 + MH_2 + MH_3 + MH_4 = h$: Không đổi.

Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ nên tổng các khoảng cách nói trên cũng bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

**Ví dụ 9**: Cho hình chóp O.ABC có các cạnh bên OA = a, OB = b, OC = c và chúng vuông góc với nhau từng đôi một:

a) Tính thể tích hình chóp O.ABC.

b) Tính chiều cao OH và diện tích tam giác ABC.

**Giải**

a) Ta có $AO \perp OB$ và $AO \perp OC$ do đó $OA \perp (OBC)$ nên hình chóp O.ABC có thể coi là hình chóp A.OBC với đáy là OBC và đường cao là AO

Do đó: $V = \frac{1}{3}S_{OBC}\ OA = \frac{abc}{6}$

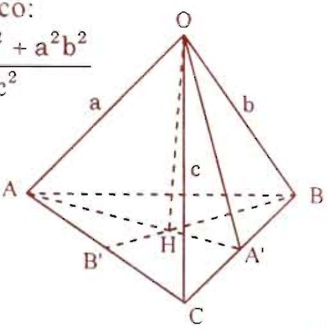
b) Hạ $OH \perp (ABC)$ thì H là trực tâm của đáy. Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

Do đó: $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$

Và $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.OH$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{3V}{OH} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{2}$$



ABC

**Ví dụ 10**: Cho tứ diện ABCD có các mặt ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a, các mặt ACD và BCD vuông góc với nhau.

a) Hãy tính theo a thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD, BC.

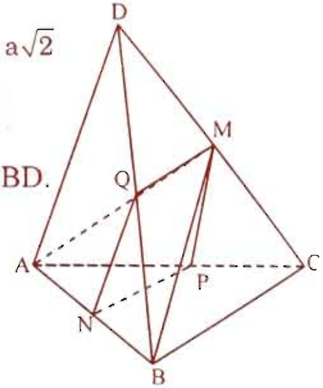
**Giải**

a) Gọi M là trung điểm của CD, khi đó $AM \perp CD$, $BM \perp CD$.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{AMB} = 90^\circ$ Mà AM = BM nên tam giác AMB vuông cân tại M. Do đó:

$$BM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CD = 2CM = 2\sqrt{BC^2 - BM^2} = a\sqrt{2}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}CD.S_{ABM} = \frac{1}{6}CD.AM.BM = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



b) Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BD.

Ta có g(AD, BC) = g(NP, MP)

Tam giác AMB vuông cân tại M

$$\Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} = NP = PM$$

Suy ra tam giác MNP là tam giác đều

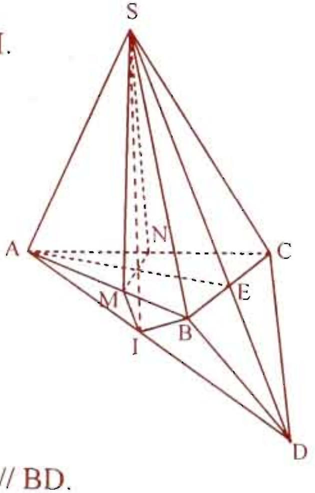
Do đó: $MPN = 60^\circ \Rightarrow g(AD, BC) = 60^\circ$

**Ví dụ 11**: Cho hình chóp S.ABC mà mỗi mặt bên là một tam giác vuông, SA = SB = SC = a. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC; D là điểm đối xứng của S qua E; I là giao điểm của đường thẳng AD với mặt phẳng (SMN)

a) Chứng minh rằng AD vuông góc với SI.

b) Tính theo a thể tích của khối tứ diện MBSI.

**Giải**



a) Ta có $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mà $BD \perp SB \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp SM$.

Mà $SM \perp AB$ (do tam giác SAB vuông cân)

$\Rightarrow SM \perp (ABD) \Rightarrow SM \perp AD$.

Chứng minh tương tự ta có:

$$SN \perp AD \Rightarrow AD \perp (SMIN) \Rightarrow AD \perp SI.$$

b) Ta có $AD = \sqrt{SA^2 + SD^2} = a\sqrt{3}$.

$$SD^2 = DI.DA \Rightarrow DI = \frac{SD^2}{DA} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$SM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Hạ $IH \perp AB$ thì IH // BD.

Do đó: $\frac{IH}{DB} = \frac{AI}{AD} = \frac{AD - DI}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IH = \frac{1}{3}DB = \frac{a}{3}$.

Mặt khác $SM \perp (ABD)$ nên

$$V_{MBSI} = \frac{1}{3}SM.S_{MBI} = \frac{1}{6}SM.BM.IH = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{2}}{2}\ \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{3} = \frac{a^3}{36}.$$

**Ví dụ 12**: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a có tâm là O. Trên các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P) ta lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y.

a) Tính độ dài MN. Suy ra điều kiện cần và đủ để tam giác OMN vuông tại O là $xy = \frac{a^2}{2}$

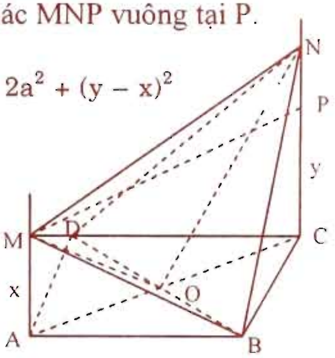
b) Giả sử M, N thay đổi sao cho tam giác OMN vuông tại O. Tính thể tích tứ diện BDMN.

**Giải**

a) Trong mp (AM, CN) hạ MP ⊥ CN ta có tam giác MNP vuông tại P. Do đó:

$$MN^2 = NP^2 + MP^2 = AC^2 + (CN - CP)^2 = 2a^2 + (y - x)^2$$

$$MN = \sqrt{2a^2 + (x - y)^2}$$



Điều kiện cần và đủ để tam giác OMN vuông tại O là:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = MA^2 + AO^2 + OC^2 + CN^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + (x - y)^2 = x^2 + y^2 + a^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}$$

b) BD ⊥ AM, BD ⊥ AC ⇒ BD ⊥ (ACM) ⇒ BD ⊥ MO.

Nếu MO ⊥ ON thì MO ⊥ (ONB), tức MO là một đường cao của tứ diện BDMN. Do đó:

$$V_{BDMN} = \frac{1}{3}MO\ \ S_{BDN} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + x^2\right)\left(\frac{a^2}{2} + y^2\right)}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2}(x^2 + y^2) + x^2y^2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{a^2}{2}(x + y)^2} = \frac{a^2(x + y)}{6}$$

**Ví dụ 13**: Cho hình chóp S.ABC có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B, BC = a. Hai mặt phẳng (SCA), (SCB) hợp nhau góc $60^0$ và $\widehat{BSC} = 45^0$

a) Tính cosin của góc $\alpha = \widehat{ASB}$

b) Tính thể tích tứ diện.

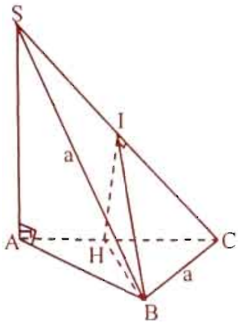
**Giải**

a) Ta có BC ⊥ AB, SA ⇒ SB ⊥ BC nên tam giác SBC vuông cân tại B, $SC = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của SC ta có BI ⊥ SC và $BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong mặt phẳng (ABC) gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC, ta có BH ⊥ AC ⇒ BH ⊥ (SAC) ⇒ BH ⊥ SC.

Mặt khác, ta có BI ⊥ SC nên ta suy ra SC ⊥ (BHI)

do đó $\widehat{HIB} = 60^o$, $HI = \frac{BI}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$



Xét tam giác vuông HIC, ta có:

$$HC^2 = HI^2 + IC^2 = \frac{2a^2}{16} + \frac{2a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

Ta có $\sin\widehat{ICH} = \frac{IH}{HC} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\ \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$SA = SC\sin\widehat{ICH} = a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

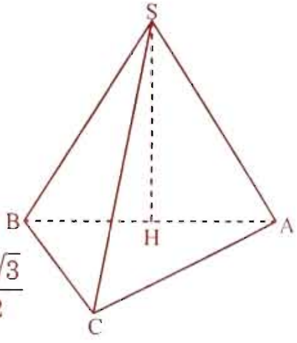
Vậy $\cos\alpha = \frac{SA}{SB} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

b) $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}\ .a\sqrt{\frac{3}{5}}.a.a\sqrt{\frac{2}{5}}$ Do đó $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{30}$

**Ví dụ 14**: Cho tứ diện SABC có các cạnh bên SA = SB = SC = d và $\widehat{ASB} = 120^o$ $\widehat{BSC} = 60^o$ $\widehat{ASC} = 90^o$

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

b) Tính thể tích tứ diện SABC.



**Giải**

a) Tam giác SBC đều nên BC = d.

Tam giác SAB cân và góc $\widehat{ASB} = 120^o$

nên $\widehat{SBA} = \widehat{SAB} = 30^o$

Gọi H là trung điểm của AB ta có $AH = BH = \frac{d\sqrt{3}}{2}$

Do đó $AB = d\sqrt{3}$.

Tam giác SAC vuông tại S nên $AC = d\sqrt{2}$

Tam giác ABC vuông tại C vì: $BC^2 + AC^2 = d^2 + 2d^2 = 3d^2 = AB^2$

b) Vì SA = SB = SC nên ta suy ra hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC) phải trùng với trung điểm H của đoạn AB vì ta có HA = HB = HC.

Vì $\widehat{ASB} = 120^o$ nên $SH = \frac{SB}{2} = \frac{d}{2}$, ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AC = \frac{1}{2}d\ .\ d\sqrt{2} = \frac{d^2\sqrt{2}}{2} \text{ nên}$$

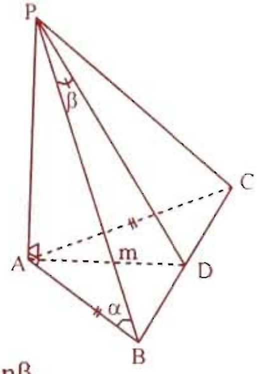
$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH\ .\ S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{d}{2}\ \frac{d^2\sqrt{2}}{2} = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}$$

**Ví dụ 15**: Một hình chóp P.ABC có hai mặt bên (PAB) và (PAC) cùng vuông góc với đáy. Đáy ABC là một tam giác cân đỉnh A có trung tuyến AD = m, PB tạo với đáy một góc $\alpha$ và tạo với mặt phẳng (PAD) một góc $\beta$.

a) Chứng minh $PB^2 = PA^2 + AD^2 + BD^2$

b) Tính thể tích của hình chóp.

### Giải



a) Hai mặt bên (PAB), (PAC) cùng vuông góc với đáy, nên giao tuyến PA vuông góc với đáy. Do đó AB là hình chiếu của PB trên đáy nên $\widehat{PBA} = \alpha$.
Tam giác ABC cân đỉnh A, nên trung tuyến $AD \perp BC$, mà $PA \perp BC$ nên $BC \perp mp(PAD)$.
Do đó PD là hình chiếu của PB trên mp(PAD) nên $\widehat{BPD} = \beta$.
Trong tam giác vuông PBD ta có: $PB^2 = PD^2 + BD^2$
Trong tam giác vuông PAD ta có: $PD^2 = PA^2 + AD^2$
Vậy: $PB^2 = PA^2 + AD^2 + BD^2$

b) Đặt PB = x thì $PA = x\sin\alpha$ và $PD = x\cos\beta$, $BD = x\sin\beta$
Trong tam giác vuông PAD ta có: $PD^2 - PA^2 = AD^2$

hay $x^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha) = m^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{m^2}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$

Thể tích hình chóp:

$$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.PA = \frac{1}{3}BD.AD.PA = \frac{1}{3}x\sin\beta.m.x.\sin\alpha = \frac{m^3\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}$$

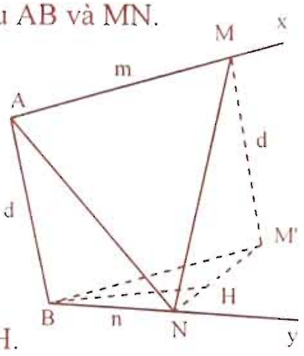
Vậy $V = \dfrac{m^3\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}$

**Ví dụ 16**: Cho hai tia Ax và By tạo với nhau góc $\alpha$, đường thẳng AB vuông góc với cả Ax và By; AB = d. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai tia Ax và By, AM = m, BN = n. Tính:

a) Thể tích khối tứ diện ABMN.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và MN.

### Giải



a) $V_{ABMN} = \dfrac{1}{6}AM.BN.d\sin\alpha = \dfrac{1}{6}m.n.d\sin\alpha$

b) Vẽ $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{AM}$ thì ABM'M là hình chữ nhật và có AB // (MNM')
Khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và MN bằng khoảng cách từ AB tới mp(MNM') hay bằng khoảng cách từ B tới mặt phẳng đó.
Hạ $BH \perp NM'$ thì $BH \perp mp(MNM')$, vậy h = BH.

ABC

Ta có: $S_{BNM'} = \frac{1}{2}NM'.BH$ nên $h = \frac{mn\sin\alpha}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}$.

**Ví dụ 17**: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông cân tại đỉnh B, BA = BC = 2a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC) là trung điểm E của AB và SE = 2a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của EC, SC; M là điểm di động trên tia đối của tia BA sao cho $\widehat{ECM} = \alpha$ ($\alpha < 90^o$) và H là hình chiếu vuông góc của S trên MC.

Tính thể tích của khối tứ diện EHIJ theo a, α và tìm α để thể tích đó lớn nhất.

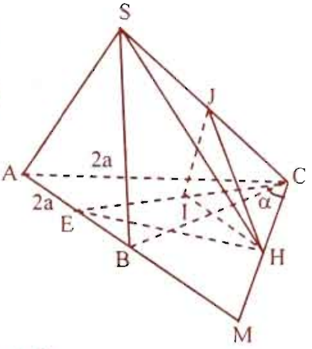
**Giải**

Vì SE ⊥ mp(ABC), SH ⊥ CM nên EH ⊥ CM.

$$CE = \sqrt{BC^2+BE^2} = \sqrt{4a^2+a^2} = a\sqrt{5}$$

Mà IJ là đường trung bình trong tam giác SCE nên

$IJ = \frac{SE}{2} = a$. Hơn nữa IJ // SE ⇒ IJ ⊥ (ABC).



Trong tam giác vuông CEH với góc ECH = α và trung tuyến HI ta có:

$$S_{EHI} = \frac{1}{2}S_{ECH} = \frac{1}{4}EH.CH$$

$$= \frac{1}{4}CE.\sin\alpha.CE.\cos\alpha = \frac{5}{8}a^2\sin2\alpha.$$

Thể tích của khối tứ diện EHIJ là:

$$V_{EHIJ} = \frac{1}{3}IJ.S_{EHI} = \frac{a}{3}.\frac{5a^2}{8}.\sin2\alpha = \frac{5}{24}a^3\sin2\alpha$$

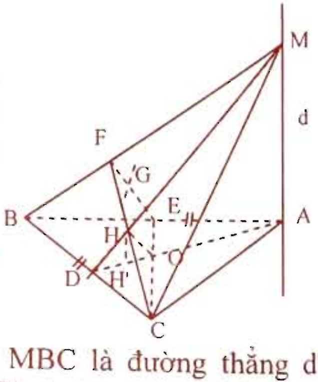
Thể tích tứ diện EHIKJ lớn nhất khi và chỉ khi: $\sin2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^o$

**Ví dụ 18**: Cho tam giác ABC, AB = AC. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A.

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC.

b) Gọi O là trực tâm của tam giác ABC, hãy xác định vị trí của M để thể tích tứ diện OHBC đạt giá trị lớn nhất.

**Giải**



a) Gọi D là trung điểm của BC. Ta có: MB = MC. Do đó MD ⊥ BC và trọng tâm G của tam giác MBC nằm trên MD thoả mãn hệ thức $\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{DM}$

Vậy G là ảnh của M trong phép vị tự tâm D, tỉ số vị tự $\frac{1}{3}$

Vậy quỹ tích các trọng tâm G của tam giác MBC là đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G' của tam giác ABC.

Hạ CE ⊥ AB, CF ⊥ MB ta có H = DM ∩ CF là trực tâm của tam giác MBC, O = DA ∩ CE là trực tâm của tam giác ABC. Do CE ⊥ AB và CE ⊥ MA nên CE ⊥ (MAB). Vì CF ⊥ MB nên EF ⊥ MB. Do đó MB ⊥ (CEF), ta suy ra MB ⊥ OH.

Chứng minh tương tự ta có MC ⊥ OH. Từ đó ta suy ra OH ⊥ (MBC) và $\widehat{DHO} = 90^0$ Vậy quỹ tích trực tâm H của tam giác MBC là đường tròn đường kính DO nằm trong mặt phẳng (D, d).

b) Gọi HH' là chiều cao của tứ diện OHBC, ta có H' thuộc DO.

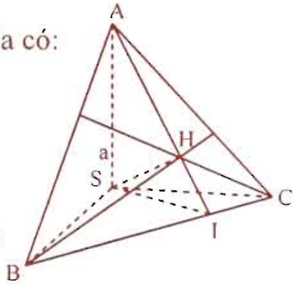
Hình chóp này có đáy OBC cố định nên $V_{OHBC}$ lớn nhất khi và chỉ khi HH' lớn nhất. Điểm H chạy trên đường tròn đường kính OD nên HH' lớn nhất khi $HH' = \frac{1}{2}DO$ nghĩa là DHH' là tam giác vuông cân tại H', suy ra tam giác DMA lúc đó vuông cân tại A. Vậy tứ diện OHBC có thể tích đạt giá trị lớn nhất, cần chọn M trên d (về hai phía của A) sao cho AM = AD.

**Ví dụ 19**: Cho tứ diện SABC có các góc phẳng ở đỉnh S vuông

a) Chứng minh rằng $\sqrt{3}\,S_{ABC} \geq S_{SAB} + S_{SBC}\ S_{SAC}$

b) Biết rằng SA = a, SB + SC = k. Đặt SB = x. Tính thể tích tứ diện SABC theo a, k, x và xác định SB, SC để thể tích tứ diện SABC lớn nhất.

**Giải**



a) Hạ SH ⊥ (ABC) thì H là trực tâm tam giác ABC. Ta có:

$$S_{ABC} \,.\, S_{HBC} = \frac{1}{2}BC.\,AI \quad \frac{1}{2}BC.HI$$

$$= \frac{1}{4}BC^2.SI^2 = S^2_{SBC}$$

Tương tự: $S_{ABC} \quad S_{HCA} = S^2_{SCA}$ ; $S_{ABC} \quad S_{HAB} = S^2_{SAB}$

Do đó $S^2_{SAB} + S^2_{SBC} + S^2_{SCA} = S^2_{ABC}$.

Với x, y, z > 0 ta có: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$$\leq x^2 + y^2 + z^2 + (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Do đó: $x + y + z \leq \sqrt{3}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Áp dụng thì được: $S_{ABC} + S_{SBC} + S_{SCA} \leq \sqrt{3}\ \ S_{ABC}$.

b) Thể tích tứ diện:

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC = \frac{1}{6}ax(k - x) \leq \frac{1}{6}a\left(\frac{x + k - x}{2}\right)^2 = \frac{ak^2}{24}$$

Dấu = khi $x = k - x \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}$

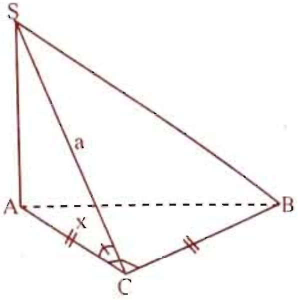
Vậy thể tích hình tứ diện SABC lớn nhất khi:

$$SB = SC = \frac{k}{2}$$

ABC

**Ví dụ 20:** Khối chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C ($\hat{C} = 90^o$) và SA ⊥ (ABC), SC = a. Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp lớn nhất.

**Giải**



Ta có BC ⊥ AC ⇒ BC ⊥ SC. Mặt khác BC ⊥ AC, suy ra góc SCA là góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC).

Đặt $\widehat{SCA} = x$. Khi đó SA = asinx, AC = acosx

$$V_{S\,ABC} = \frac{a\sin x}{3}\,\frac{a^2\cos^2 x}{2} = \frac{a^3}{6}\sin x.\cos^2 x$$

Xét hàm số $y = \sin x\cos^2 x$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có $y' = \cos^3 x - 2\cos x\sin^2 x = \cos x(\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x)$

$$= \cos x(3\cos^2 x - 2) = 3\cos x\left(\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\cos x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Xét α sao cho: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

BBT:

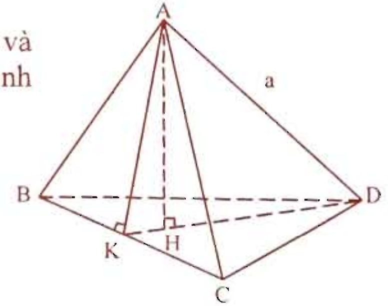
| x | 0 | | α | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | – | |
| y | | ↗ | | ↘ | |

Vậy $S_{S\,ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi x = α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Cách khác: Đặt t = sinx, 0 < t < 1 hoặc dùng bất đẳng thức Côsi.

**Ví dụ 21:** Chứng minh rằng một tứ diện thoả hai điều kiện: năm cạnh có độ dài nhỏ hơn 1, còn cạnh thứ sáu có độ dài tuỳ ý thì thể tích $V < \frac{1}{8}$.

**Giải**



Xét tứ diện ABCD có 5 cạnh bằng 1 và cạnh còn lại AD = a tuỳ ý. Ta chứng minh thể tích của tứ diện này là $V_1 \le \frac{1}{8}$.

Thật vậy, hạ AH vuông góc với (BCD), AK vuông góc BC thì:

ABC

$$V_1 = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.AH \le \frac{1}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{4}.AK$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ = \frac{1}{8}$$

Ta có tứ diện thoả đề bài có thể tích nhỏ hơn $\frac{1}{8} \Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 22:** Cho tứ diện ABCD có một cạnh lớn hơn a, các cạnh còn lại đều không lớn hơn a. Gọi V là thể tích của nó. Chứng minh rằng thể tích $V \le \frac{a^3}{8}$.

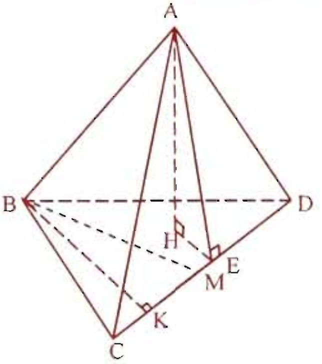
**Giải**

Không giảm tính tổng quát, giả sử AB > a khi đó:

$a \ge \text{Max}\ \{AC, AD, BC, BD, CD\}$

Hạ các đường cao BK, AE, AH của tam giác BCD, ACD và của tứ diện

Ta có $V = \frac{1}{6}AH.BK.CD$



Đặt CD = x và gọi M là trung điểm của CD.

Xét tam giác BCD.

$$BM^2 = \frac{2BC^2 + 2BD^2 - CD^2}{4} \le \frac{4a^2 - x^2}{4}$$

$$\Rightarrow BK \le BM \le \frac{1}{2}.\sqrt{4a^2 - x^2}$$

Tương tự ở $\Delta ACD$ ta có: $AE \le \frac{1}{2}.\sqrt{4a^2 - x^2}$

Mà $AH \le AE \Rightarrow AH \le \frac{1}{2}.\sqrt{4a^2 - x^2}$

Do đó $V \le \frac{1}{24}(4a^2 - x^2)x = \frac{1}{24}(4a^2x - x^3)$.

Xét hàm số $y = 4a^2x - x^3$ trên [0, a]

Ta có $y' = 4a^2 - 3x^2 \Rightarrow y' > 0$ với mọi $x \in [0, a]$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số là $3a^3$ xảy ra khi x = a nên $V \le \frac{a^3}{8}$

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} BC = BD = AC = AD = CD = a \\ AM \perp mp(BCD) \end{cases}$

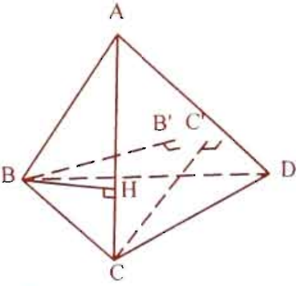
**Ví dụ 23:** Gọi V và S lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của một tứ diện. Chứng minh rằng $\frac{S^3}{V^2} > 288$.

**Giải**

Gọi tứ diện đã cho là ABCD. Gọi diện tích các mặt ABC, ACD, ADB, BCD lần lượt là $S_D$, $S_B$, $S_C$, $S_A$.

ABC

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (ACD) và C' là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (ABD).



Ta có:

$$V = \frac{1}{3}S_B.BB' = \frac{1}{3}S_C.CC'$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{1}{9}S_BS_C.BB'.CC'$$

Hạ đường cao BH của tam giác ABC.

Ta có $BB' \le BH$ và $CC' \le AC$.

Từ đó suy ra $V^2 \le \frac{2}{9}S_B.S_C.\frac{1}{2}AC.BH = \frac{2}{9}S_B.S_C.S_D$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 90^o$

Lập luận tương tự ta được:

$$V^2 \le \frac{2}{9}S_CS_BS_A,\ V^2 \le \frac{2}{9}S_DS_AS_B \text{ và } V^2 \le \frac{2}{9}S_AS_BS_C.$$

Do đó $V^8 \le (\frac{2}{9})^4\ \ (S_AS_BS_CS_D)^3$

Vì đẳng thức không đồng thời xảy ra nên $V^2 < \frac{2}{9}\left(\sqrt[4]{S_AS_BS_CS_D}\right)^3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

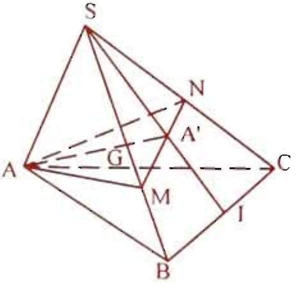
$$\sqrt[4]{S_AS_BS_CS_D} \le \frac{S_A + S_B + S_C + S_D}{4} = \frac{S}{4}$$

Vậy $V^2 < \frac{S^3}{288} \Rightarrow \frac{S^3}{V^2} > 288$.

**Ví dụ 24:** Cho tứ diện SABC và G là trọng tâm của tứ diện. Một mp($\alpha$) quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N. Gọi V là thể tích tứ diện SABC, $V_1$ là thể tích tứ diện SAMN. Chứng minh $\frac{4}{9} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{1}{2}$.

**Giải**

Gọi A' là trọng tâm $\Delta$SBC, I là trung điểm BC



Ta có A,G, A' thẳng hàng, S, A', I thẳng hàng

Đặt $\frac{SM}{SB} = x$ , $\frac{SN}{SC} = y$ với $0 \le x, y \le 1$.

Ta có : $\frac{V_1}{V} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = xy$

Mặt khác : $\frac{S_{SMA'}}{S_{SIB}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SA'}{SI} \Rightarrow \frac{2S_{SMA'}}{S_{SCB}} = \frac{2x}{3}$

Tương tự: $\frac{2S_{SNA'}}{S_{SCB}} = \frac{2y}{3} \Rightarrow \frac{S_{SMA'} + S_{SNA'}}{S_{SCB}} = \frac{x + y}{3}$

Hay $\frac{S_{SMN}}{S_{SCB}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = xy = \frac{x + y}{3} \Rightarrow y = \frac{x}{3x - 1}$

Kết hợp ta có điều kiện $\frac{1}{2} \le x \le 1$, $\frac{1}{2} \le y \le 1$

Ta có: $\frac{V_1}{V} = xy = \frac{x^2}{3x-1}$ . Xét $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

BBT:

| x | 1/2 | | 2/3 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | − | 0 | + | |
| f (x) | 1/2 | ↘ | 4/9 | ↗ | 1/2 |

Vậy $\frac{4}{9} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{1}{2}$.

**Ví dụ 25:** Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N chuyển động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10$

a) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định.

b) Chứng minh $\frac{6}{25} \le \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} \le \frac{3}{8}$.

**Giải**

a) $2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\frac{BC}{BM} + \frac{3}{10}\frac{BD}{BN} = 1$

Gọi K là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{10}\overrightarrow{BD}$ (1)

thì K cố định. Đặt BC = x.BM; BD = y.BN. Khi đó (1) suy ra :

$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}x\overrightarrow{BM} + \frac{3}{10}y\overrightarrow{BN}$, vì $\frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y = 1$ nên M, N, K thẳng hàng. Do đó MN luôn qua điểm cố định K.

b) $\frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{BM}{BC}\cdot\frac{BN}{BD} = \frac{1}{xy} = \frac{3}{x(10-2x)}$

Vì $1 \le x$ và $1 \le y$ và $2x + 3y = 10$ nên $1 \le x \le \frac{7}{2}$

Xét $f(x) = \frac{3}{x(10-2x)}$, $x \in [1; \frac{7}{2}]$, $f'(x) = \frac{12x - 30}{x^2(10-2x)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

BBT:

| x | 1 | | 5/2 | | 7/2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | − | 0 | + | |
| f (x) | 3/8 | ↘ | 6/25 | ↗ | 2/7 |

ABC

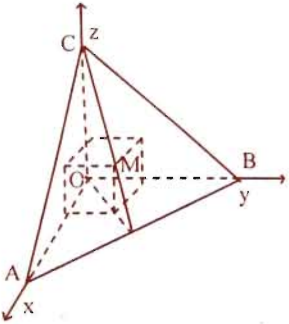
Vậy $\frac{6}{25} \le f(x) \le \frac{3}{8}$ hay $\frac{6}{25} \le \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} \le \frac{3}{8}$

**Ví dụ 26:** Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một tạo tam diện Oxyz. Điểm M cố định nằm trong góc tam diện. Một mặt phẳng qua M cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Gọi khoảng cách từ M đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) lần lượt là a, b, c.

1) Chứng minh: $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$.

2) Tính OA, OB, OC theo a, b, c để tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

**Giải:**



1) Ta có: $V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOCA}$

nên $\frac{1}{6}OA.OB.OC$

$$= \frac{1}{6}OA.OB.c + \frac{1}{6}OB.OC.a + \frac{1}{6}OC.OA.b$$

Do đó: $1 = \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC}$

2) Ta có: $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC$.

Điểm M cố định tức là các số a, b, c không đổi. Do đó V nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OA.OB.OC nhỏ nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si:

$$1 = \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} \ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{OA.OB.OC}} \Leftrightarrow OA.OB.OC \ge 27abc.$$

OA.OB.OC nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{OA} = \frac{b}{OB} = \frac{c}{OC}$

Vậy: V nhỏ nhất $\Leftrightarrow OA = 3a, OB = 3b, OC = 3c$.

**Ví dụ 27:** Cho tứ diện trực tâm ABCD có thể tích V (tứ diện có các cạnh đối đôi một vuông góc với nhau). Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong tứ diện ta có bất đẳng thức sau:

$$MA\,.\,S_{BCD} + MB\,.\,S_{ACD} + MC.S_{ABD} + MD.S_{ABC} \ge 9V$$

**Giải**

Hạ $AA_1$, $MA_2$ vuông góc với mp(BCD).

Ta có: $AM + MA_2 \ge AA_2 \ge AA_1 \Rightarrow AM \ge AA_1 - MA_2$

Dấu bằng trong xảy ra khi M thuộc đường cao $AA_1$ của tứ diện.

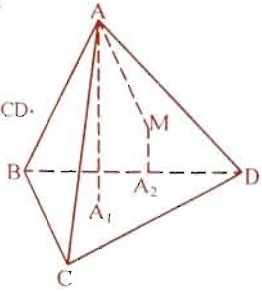
Do đó $AM.S_{BCD} \ge AA_1.S_{BCD} - MA_2.S_{BCD} \ge 3V - 3V_{M\,BCD}$.

Lý luận tương tự ta có:

$BM.S_{ACD} \ge 3V - 3V_{M.ACD}$;

$MC.S_{ABD} \ge 3V - 3V_{M.ABD}$

$MD.S_{ABC} \ge 3V - 3V_{M.ABC}$



ABC

Ta có $MA.S_{BCD} + MB.S_{ACD} + MC.S_{ABD} + MD.S_{ABC}$

$$\geq 12V - 3(V_{M.BCD} + V_{M.ACD} + V_{M.ABD} + V_{M.ABC}) = 9V$$

Dấu = xảy ra khi M đồng thời thuộc 4 đường cao của tứ diện ABCD nên $M \equiv$ trực tâm H của tứ diện ABCD.

**Ví dụ 28:** Cho tứ diện ABCD có thể tích V. Một mặt phẳng đi qua trọng tâm M của tứ diện cắt DA, DB, DC tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = V_{AA'B'C'} + V_{BA'B'C'} + V_{CA'B'C'}$.

**Giải**

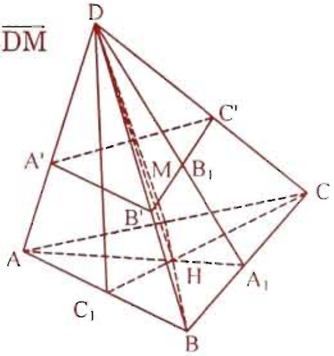
Gọi $DA_1 = (DAM) \cap (DBC)$, $DB_1 = (DBM) \cap (DAC)$

$DC_1 = (DCM) \cap (DAB)$

$DM \cap (ABC) = H$ là trọng tâm $\Delta ABC$ nên

$$\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = 3\overline{DH}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DA'}.\overline{DA'} + \frac{DB}{DB'}.\overline{DB'} + \frac{DC}{DC'}.\overline{DC'} = 3.\frac{4}{3}\overline{DM} = 4\overline{DM}$$



Do A', B', C', M đồng phẳng nên

$$4 = \frac{DA}{DA'} + \frac{DB}{DB'} + \frac{DC}{DC'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{DA.DB.DC}{DA'.DB'.DC'}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{D.A'B'C'}}{V_{D.ABC}} = \frac{DA'.DB'.DC'}{DA.DB.DC} \geq \frac{27}{64}$$

Ta có $T = V_{A.A'B'C'} + V_{B.A'B'C'} + V_{C.A'B'C'}$

$$= V_{D.A'B'C'}\left(\frac{AA'}{DA'} + \frac{BB'}{DB'} + \frac{CC'}{DC'}\right)$$

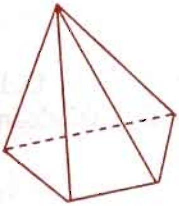
$$\text{Mà } 4 = \frac{DA}{DA'} + \frac{DB}{DB'} + \frac{DC}{DC'} = \frac{DA' + AA'}{DA'} + \frac{DB' + BB'}{DB'} + \frac{DC' + CC'}{DC'}$$

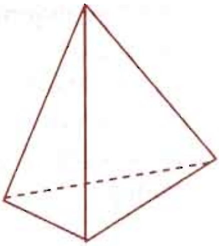
$$= \frac{AA'}{DA'} + \frac{BB'}{DB'} + \frac{CC'}{DC'} + 3 \Rightarrow \frac{AA'}{DA'} + \frac{BB'}{DB'} + \frac{CC'}{DC'} = 1$$

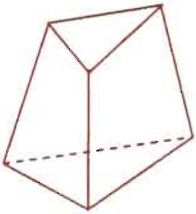
Do đó $T = V_{D.A'B'C'} \geq \frac{27}{64}V_{D.ABC}$

Vậy $\min T = \frac{27}{64}V_{D.ABC}$ khi $\frac{AA'}{DA'} = \frac{BB'}{DB'} = \frac{CC'}{DC'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (A'B'C') \,//\, (ABC)$.

## DẠNG 3: KHỐI ĐA DIỆN - KHỐI CHÓP







– Hình chóp S.ABC, S.ABCD,…

– Hình chóp đều: Đáy đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Hình chiếu của đỉnh là tâm của đáy. Trung đoạn của hình chóp đều là đoạn nối đỉnh với trung điểm của cạnh đáy.

– Hình chóp cụt do mặt phẳng song song với đáy cắt chia hình chóp.

– Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}$ B.h

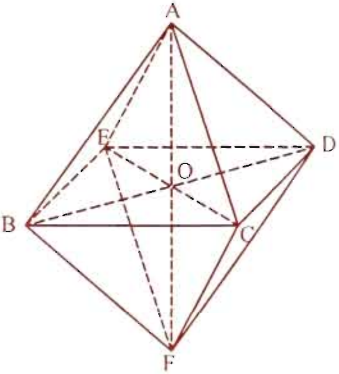
– Thể tích khối chóp cụt: $V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{BB'} + B')h$

• **Chú ý:**

1) Khi tính toán các đại lượng, nếu cần thì đặt ẩn rồi tìm phương trình để giải ra ẩn đó.
2) Khi xác định giao điểm, giao tuyến, thiết diện ta thường dùng cách cắt nhau, kéo dài cắt nhau, đường gióng, giao tuyến gốc và các quan hệ song song, vuông góc đề bài cho.
3) Để tính diện tích, thể tích có khi ta tính gián tiếp bằng cách chia nhỏ các phần hoặc lấy phần lớn hơn trừ đi các phần dư hoặc dùng tỉ diện tích, đưa về tỉ thể tích 2 khối chóp tam giác.

**Ví dụ 1**: Tính thể tích của khối tâm mặt đều có cạnh bằng a.

**Giải**



Ta phân chia khối tám mặt đều cạnh a với các đỉnh là A, B, C, D, E, F thành hai khối chóp tứ giác đều A.BCDE và F.BCDE Vì hai khối chóp đó bằng nhau nên có thể tích bằng nhau, do đó thể tích V của khối tám mặt đều bằng hai lần thể tích $V_1$ của khối chóp A.BCDE.

Vì BCDE là hình vuông cạnh a với tâm O và tam giác ABD là tam giác vuông cân đỉnh A nên:

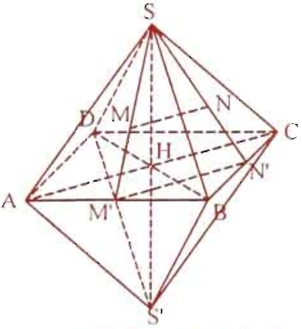
$$V_1 = \frac{1}{3}S_{BCDE}.AO = \frac{1}{3}a^2.a\frac{\sqrt{2}}{2} = a^3\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Suy ra khối tám mặt đều có thể tích là: $V = 2V_1 = a^3\frac{\sqrt{2}}{3}$

**Ví dụ 2**: Tính thể tích của khối lập phương có các đỉnh là trọng tâm các mặt của một khối tám mặt đều cạnh a.

**Giải**

Giả sử có khối tám mặt đều với các đỉnh là S, S', A, B, C, D. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SBC thì đoạn thẳng MN là một cạnh của khối lập phương.



Gọi M', N' lần lượt là trung điểm của AB và BC thì M và N lần lượt nằm trên SM' và SN' nên:

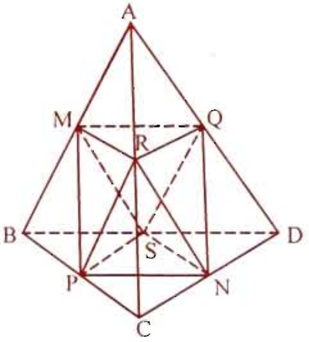
$$MN = \frac{2}{3}M'N' = \frac{2}{3}\frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Vậy thể tích của khối lập phương là:

$$V = MN^3 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$$

**Ví dụ 3**: Cho khối tứ diện ABCD có thể tích V Tính thể tích khối đa diện có 6 đỉnh là 6 trung điểm của 6 cạnh của tứ diện ABCD.

**Giải**



Giả sử trung điểm các cạnh của tứ diện ABCD là M, N, P, Q, R, S. Khối đa diện với các đỉnh là M, N, P, Q, R, S nhận được từ khối tứ diện ABCD bằng cách bỏ đi 4 khối tứ diện sau đây: AMRQ, BMSP, CPRN, DSQN.

Mỗi khối tứ diện này có thể tích bằng $\frac{1}{8}V$

Suy ra thể tích khối đa diện cần tìm

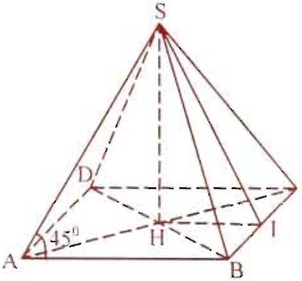
$$V' = V - 4.\frac{1}{8}V = \frac{1}{2}V$$

**Ví dụ 4**: Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng $45^o$

a) Tính thể tích hình chóp S.ABCD

b) Tính tan của góc giữa mặt bên và đáy.

**Giải**



a) Hình chóp đều nên hình chiếu của S lên đáy là tâm H của hình vuông ABCD.

Tam giác vuông SAH có góc $A = 45^o$ nên là tam giác vuông cân tại H.

Do đó $SH = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Thể tích $V = \frac{1}{3}S_đ \,.\, h = \frac{1}{3}.a^2\,\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

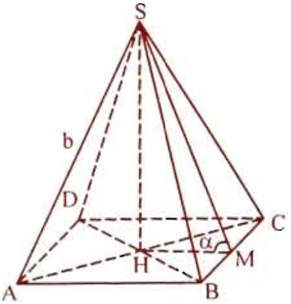
b) Gọi I là trung điểm của BC thì SI, HI $\perp$ BC.

Do đó $\widehat{SIH} = \alpha$ là góc giữa mặt bên và đáy.

Tam giác vuông SIH: $\tan\alpha = \frac{SH}{HI} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{2}$.

**Ví dụ 5**: Tính thể tích hình chóp đều S.ABCD biết SA = b và góc giữa mặt bên và đáy bằng $\alpha$.

ABC



**Giải**

Hạ SH ⊥ (ABCD) thì H là tâm hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm BC thì SM, HM ⊥ BC $\Rightarrow \widehat{SHM} = \alpha$.

Gọi a là cạnh đáy.

Trong tam giác vuông SMB có:

$$SM^2 = SB^2 - MB^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4}$$

Trong tam giác vuông SMH có: $SM = \frac{HM}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$

Do đó: $a^2 = \cos^2\alpha(4b^2 - a^2)$

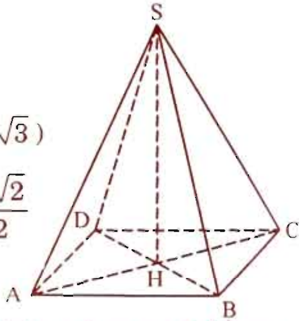
$\Rightarrow a^2 = \frac{4b^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$ nên $a = \frac{2b\cos\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}$

Trong tam giác SHM có:

$$SH = HM.\tan\alpha = \frac{b\cos\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}.\tan\alpha = \frac{b\sin\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}$$

Suy ra $V = \frac{1}{3}.SH.a^2 = \frac{4}{3}\frac{b^3\sin\alpha.\cos^2\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{(1+\cos^2\alpha)^2}$

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a và SA = SB = SC = SD = a. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp.



**Giải**

Diện tích toàn phần của hình chóp S.ABCD là:

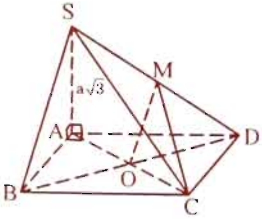
$$S_{tp} = 4.S_{SAB} + S_{ABCD} = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2 = a^2(1+\sqrt{3})$$

Gọi H là tâm của đáy thì: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.\,S_{ABCD} = \frac{a^2}{3}\,\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

**Ví dụ 7**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích khối tứ diện SACD và tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

**Giải**



Thể tích của khối tứ diện SACD là:

$$V_{SACD} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}DA.DC.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Gọi M là trung điểm của SD.

Ta có OM // SB nên g(SB; AC) = g(OM, OC)

Tam giác vuông SAB có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a \text{ nên } OM = a.$$

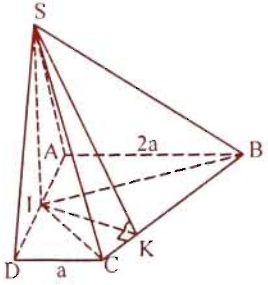
Tương tự, $SD = 2a \Rightarrow MD = a \Rightarrow CM = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác OMC, ta có

$$\cos\widehat{COM} = \frac{OM^2 + OC^2 - MC^2}{2OM.OC} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos(SB.AC) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

**Ví dụ 8**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng $60^\circ$ Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

**Giải**



Vì (SBI), (SCI) cùng vuông góc với đáy nên $SI \perp (ABCD)$.

Hạ $IK \perp BC$ thì $SK \perp BC \Rightarrow \widehat{SKI} = 60^\circ$

Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \,.\, AD = 3a^2$

Và $S_{ABI} + S_{CDI} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow S_{IBC} = \frac{3a^2}{2}$

Ta có $BC^2 = (AB - CD)^2 + AD^2 = 5a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{5}$ và $S_{IBC} = \frac{1}{2}BC.IK \Rightarrow IK = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \,.\, SI = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$

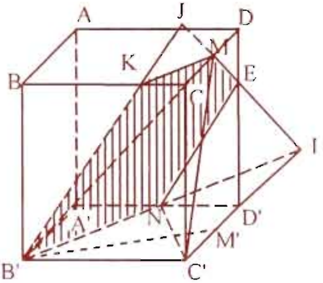
**Ví dụ 9**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm của CD và N là trung điểm của A'D' Tính:

a) Thể tích khối tứ diện B'MC'N

b) Góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng B'M và C'N.

c) Thể tích hai phần của khối lập phương bị phân chia bởi mặt phẳng đi qua B', M, N.

**Giải**



a) Xem tứ diện B'MC'N là khối chóp đỉnh M và đáy là tam giác B'C'N thì diện tích đáy là $\frac{a^2}{2}$ và đường cao là a, vậy thể tích của nó là $V = \frac{a^3}{6}$

b) Gọi M' là trung điểm của C'D' thì B'M có hình chiếu trên mp(A'B'C'D') là B'M'.

Ta có $B'M' \perp C'N$ nên $B'M \perp C'N$.

Ta có $B'M^2 = B'C'^2 + CC'^2 + CM^2 = a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow B'M = \frac{3a}{2}$

ABC

$$C'N^2 = C'D'^2 + D'N^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow C'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Thể tích tứ diện B'MC'N: $V = \frac{1}{6}B'M.C'N.d.\sin 90^\circ$ trong đó d là khoảng cách giữa B'M và C'N nên $V = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}\,\frac{a\sqrt{5}}{2}.d = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}d$.

Mà $V = \frac{a^3}{6}$ do đó $d = \frac{4a}{3\sqrt{5}} = \frac{4a\sqrt{5}}{15}$

c) Kéo dài B'N cắt C'D' tại I, đường thẳng MI cắt DD' tại E và cắt CC' tại J. Nối JB' cắt BC tại K. Ta được thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mp(B'MN) là ngũ giác B'NEMK. Gọi $V_1$ là thể tích phần hình hộp bị phân chia có chứa điểm C', C và D'. Ta có D'I = a, $ED' = \frac{2a}{3}$. $CK = \frac{a}{4}$

Ta có $V_1 = V_{KCMB'C'I} - V_{(END'I)}$ trong đó KCMB'C'I là một khối chóp cụt có đường cao là a và diện tích hai đáy là

$$S_{B'C'I} = a^2 \quad S_{KCM} = \frac{1}{2}CM.CK = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}\,\frac{a}{4} = \frac{a^2}{16}$$

$$V_{(KCMB'I)} = \frac{a}{3}\left(a^2 + \frac{a^2}{16} + \sqrt{a^2.\frac{a^2}{16}}\right) = \frac{21a^3}{48}$$

$$V_{(END'I)} = \frac{1}{3}S_{(ND'I)}.ED' = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}\,\frac{2a}{3} = \frac{a^3}{18}$$

Vậy $V_1 = \frac{21a^3}{48} - \frac{a^3}{18} = \frac{55a^3}{144}$

Gọi $V_2$ thể tích phần bị phân chia còn lại của hình lập phương thì:

$$V_2 = a^3 - V_1 = a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144}$$

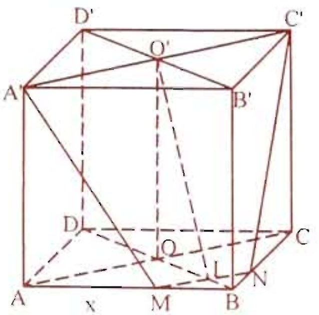
**Ví dụ 10**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a và một điểm M trên cạnh AB, AM = x, 0 < x < a. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường chéo A'C' của hình vuông A'B'C'D'.

a) Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện, hãy tìm x để thể tích của một trong hai khối đa diện đó gấp đôi thể tích khối đa diện kia.

**Giải**

a) Mặt phẳng (P) cắt mặt ABCD theo giao tuyến MN // A'C'. Với N ∈ BC. Thiết diện là hình thang A'C'NM có A'M = C'N. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và O' là tâm của hình vuông A'B'C'D' thì O'I là đường cao của hình thang A'C'NM. Ta có:



$$MN = BM\sqrt{2} = (a-x)\sqrt{2},\ OI = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Do đó: $O'I = \sqrt{OO'^2 + OI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$

Gọi S là diện tích của hình thiết diện ta có:

$$S = \frac{1}{2}(A'C' + MN)O'I = \frac{1}{2}[a\sqrt{2} + (a-x)\sqrt{2}]\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$$

b) Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện nhỏ là hình chóp cụt tam giác có đáy nhỏ là tam giác BMN và đáy lớn là tam giác B'A'C'. Gọi $V_1$ là thể tích khối chóp cụt có chiều cao h = a, gọi S là diện tích tam giác B'A'C', ta có $S = \frac{a^2}{2}$ và S' là diện tích tam giác BMN, ta có $S' = \frac{(a-x)^2}{2}$

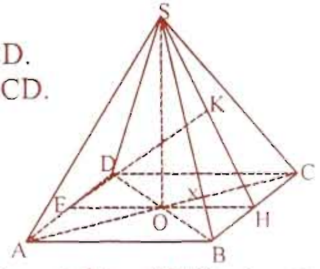
Từ đó: $V_1 = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'}) = \frac{a}{6}(x^2 - 3ax + 3a^2)$

Ta có $V_1 = 2(V - V_1) \Leftrightarrow V_1 = \frac{2}{3}V$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{6}(x^2 - 3ax + 3a^2) = \frac{2a^3}{3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)a.$$

**Ví dụ 11**: Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD mà khoảng cách từ đỉnh A đến mp(SBC) bằng 2a. Với giá trị nào của góc giữa mặt bên và mặt đáy của khối chóp thì thể tích của khối chóp nhỏ nhất.

**Giải**



Hạ SO ⊥ (ABCD) thì O là tâm hình vuông ABCD.

Gọi EH là đường trung bình của hình vuông ABCD.

Vì AD // BC ⇒ AD // (SBC)

⇒ d(A, (SBC)) = d(E, (SBC)).

Hạ EK ⊥ SH, ta có: EK ⊥ (SBC)

⇒ EK = d(A, (SBC)) = 2a.

Ta có BC ⊥ SH, BC ⊥ OH ⇒ $\widehat{SHO}$ là góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng đáy.

Đặt $\widehat{SHO} = x$. Khi đó: $EH = \frac{2a}{\sin x}$, $OH = \frac{a}{\sin x}$, $SO = \frac{a}{\sin x}\tan x = \frac{a}{\cos x}$

Vậy $S_{S\,ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{4a^3}{3\cos x\sin^2 x}$

Do đó $V_{S\,ABCD}$ nhỏ nhất ⇔ $y = \cos x.\sin^2 x$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có:

ABC

$$y' = -\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x = \sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \sin x(2 - 3\sin^2 x) = 3\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sin x\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sin x\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Xét giá trị $\alpha$ sao cho $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

BBT:

| x | 0 |  | $\alpha$ |  | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' |  | + | 0 | – |  |
| y |  | ↗ |  | ↘ |  |

Vậy $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

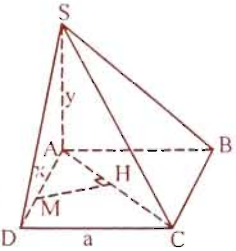
**Ví dụ 12**: Trên cạnh AD của hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a, lấy điểm M sao cho: AM = x ($0 \le x \le a$). Trên nửa đường thẳng Az vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông tại điểm A, lấy điểm S sao cho SA = y ($y > 0$).

a) Chứng minh rằng (SAB) ⊥ (SBC) và tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

b) Tính thể tích khối chóp S.ABCM theo a, y và x.

c) Biết rằng $x^2 + y^2 = a^2$ Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp S.ABCM.

**Giải**



a) Ta có BC ⊥ AB, SA nên BC ⊥ (SAB).
Do đó (SAB) ⊥ (SBC).
Vì (SAC) ⊥ (ABCD) theo giao tuyến AC nên hạ MH ⊥ AC thì MH ⊥ (SAC).
Vậy MH là khoảng cách từ M tới mặt phẳng (SAC).
Trong tam giác vuông AMH có:

$$MH = x.\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

b) Hình chóp S.ABCM có đường cao SA = y và có đáy là hình thang vuông nên diện tích đáy là: $S = \frac{1}{2}a(a + x)$

Do đó thể tích khối chóp S.ABCM là: $V = \frac{1}{3}y\ \ \frac{1}{2}a(a + x) = \frac{1}{6}ya(a + x)$.

c) Theo giả thiết $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$ nên

$$V^2 = \frac{1}{36}a^2(a^2 - x^2)(x + a)^2 = \frac{1}{36}a^2(a - x)(a + x)^3$$

Đặt $f(x) = V^2$ với $0 \le x \le a$, ta có:

$$f'(x) = -\frac{a^2}{36}(a + x)^3 + \frac{a^3}{36}3(a - x)(a + x)^2 = \frac{a^2(a + x)^2(2a - 4x)}{36}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

BBT:

| $x$ | $0$ | | $\frac{a}{2}$ | | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{a}{2}$, khi đó thể tích của khối chóp S.ABCM đạt giá trị lớn nhất là: $V = \sqrt{f(x)_{\max}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

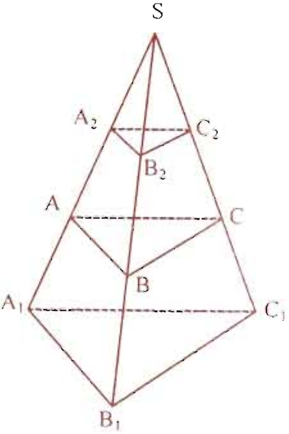
**Ví dụ 13**: Cho hình chóp cụt có chiều cao h, diện tích của thiết diện song song và cách đều 2 đáy là S. Chứng minh thể tích V thoả mãn: $Sh \le V \le \frac{4}{3}Sh$.

**Giải**

Gọi $S_1$, $S_2$ là diện tích 2 đáy hình chóp cụt.

Ta chứng minh: $S = \left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}\right)^2$

Gọi S là đỉnh hình chóp và k là chiều cao của hình chóp nhỏ, ta có tỉ diện tích:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{k + h}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{k}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = 1 + \frac{h}{k}$$

$$\frac{S}{S_2} = \left(\frac{k + \frac{h}{2}}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{2k}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S}{S_2}} = 1 + \frac{h}{2k}$$

Do đó $\sqrt{\frac{S}{S_2}} - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - 1\right) \Rightarrow 4S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

Ta có thể tích hình chóp cụt:

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)h$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_2})^2 - \sqrt{S_1S_2}\right]h \le \frac{1}{3}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_2})^2h = \frac{4}{3}Sh$$

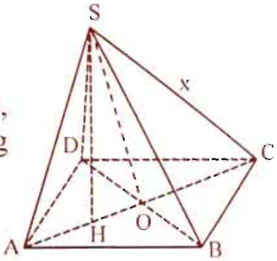
Và $V = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_2})^2 + \frac{1}{2}(S_1 + S_2)\right]h$

$$\geq \frac{1}{3}\left[2S + \frac{1}{4}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2\right]h = \frac{1}{3}.3S.h = Sh$$

Vậy $Sh \leq V \leq \frac{4}{3}Sh$.

**Ví dụ 14:** Cho hình chóp S.ABCD có bảy cạnh bằng 1 và cạnh bên SC = x. Định x để thể tích khối chóp là lớn nhất.

**Giải**



Đáy ABCD có 4 cạnh bằng 1 nên là 1 hình thoi
$\Rightarrow AC \perp BD$.

Ba tam giác ABD, CBD, BSD có chung cạnh BD, các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1 nên bằng nhau, các trung tuyến AO,SO và CO bằng nhau.

Suy ra tam giác ASC vuông tại S ta được
$AC = \sqrt{x^2 + 1}$.

Gọi H là hình chiếu đỉnh S trên đáy (ABCD).

Do SA = SB = SD = 1 nên HA = HB = HD $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD $\Rightarrow H \in AC \Rightarrow$ SH là đường cao của tam giác vuông ASC.

Ta có $SH.AC = SA.SC \Rightarrow SH = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$OB^2 = AB^2 - OA^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}\right)^2 = \frac{3 - x^2}{4} \Rightarrow OB = \frac{1}{2}\sqrt{3 - x^2}$$

Điều kiện $x^2 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{3}$

Ta có $S_{ABCD} = AC.OB = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}.\sqrt{3 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}$

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}\,.\,SH = \frac{1}{6}x\sqrt{3 - x^2}$

Ta có thể dùng đạo hàm hay bất đẳng thức Côsi:

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{x^2(3 - x^2)} \leq \frac{1}{6}.\frac{x^2 + 3 - x^2}{2} = \frac{1}{4}$$

Dấu " = " khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ABC

## DẠNG 4: TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp tam giác S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lấy ba điểm A', B', C' khác với S thì có tỉ số: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC}$

Chú ý:

Với hình chóp có đáy là tứ giác, ngũ giác,…để tính tỉ số thể tích ta cắt chia thành các hình chóp tam giác, đưa về tỉ thể tích 2 khối chóp tam giác.

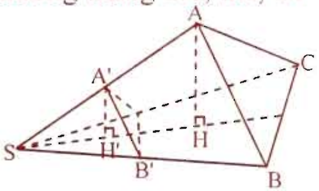
- Để tính thể tích, ngoài cách tính trực tiếp thì ta có thể tính gián tiếp bằng cách chia nhỏ các phần hoặc lấy phần lớn hơn trừ đi các phần dư hoặc dùng tỉ thể tích.

Tỉ số diện tích $\frac{S(AB'C')}{S(ABC)} = \frac{AB'}{AB}\frac{AC'}{AC}$

Dùng tỉ số diện tích, thể tích để chứng minh các hệ thức, bất đẳng thức về các đại lượng hình học.

**Ví dụ 1:** Cho khối chóp tam giác S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lấy ba điểm A', B', C' khác với S.

Chứng minh rằng: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC}$



**Giải:**

Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu của A và A' xuống mp(SBC) thì AH//A'H' và S, H', H thẳng hàng.

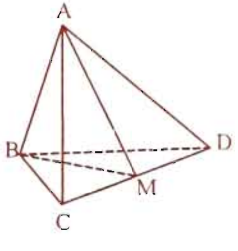
Đặt $\alpha = \widehat{BSC}$. Ta có:

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}B'h}{\frac{1}{3}Bh} = \frac{\frac{1}{2}SB'.SC'\sin\alpha.SH}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin\alpha.SH} = \frac{SA}{SA}\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC}$$

**Ví dụ 2**: Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho tỉ số thể tích của hai khối tứ diện này bằng một số k > 0 cho trước.

**Giải**

Xét khối tứ diện ABCD. Lấy điểm M nằm giữa C và D sao cho CM = kMD. Khi đó, khối tứ diện ABCD được phân chia thành hai khối tứ diện ABCM và ABMD.



Ta có: $\frac{V_{ABCM}}{V_{ABMD}} = \frac{V_{C.ABM}}{V_{D.ABM}} = \frac{\frac{1}{3}S_{ABM}.CC'}{\frac{1}{3}S_{ABM}.DD'} = \frac{CM}{CD} = k$.

Vậy $V_{ABCM} = k.V_{ABMD}$.

ABC

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng nếu có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' thì $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = |k|^3$

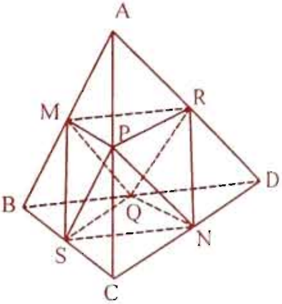
**Giải**

Giả sử phép vị tự tỉ số k biến hình chóp A.BCD thành hình chóp A'.B'C'D'. Khi đó biến đường cao AH của hình chóp A.BCD thành đường cao A'H' của hình chóp A'B'C'D'. Do đó A'H' = $|k|$AH. Tam giác BCD được biến thành tam giác B'C'D' nên $S_{B'C'D'} = k^2 S_{BCD}$.

Suy ra $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{B'C'D'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{BCD}.AH} = |k|^3$

**Ví dụ 4**: Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tám mặt đều. Hãy so sánh thể tích của tứ diện đều đã cho và thể tích của hình tám mặt đều đó.

**Giải**



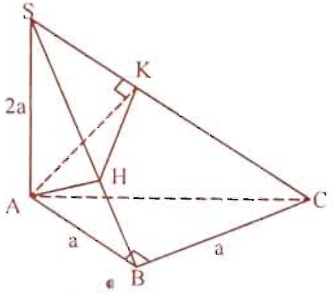
Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của tứ diện đều ABCD thì các tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều, vậy ta có hình tám mặt đều MNPQRS.

Vì các tứ diện AMPR, BMQS, CPSN, DQNR đều là những tứ diện đồng dạng với tứ diện ABCD với tỉ số $k = \frac{1}{2}$ nên có thể tích bằng $\frac{V}{8}$

Suy ra $V_{MPRQSN} = V - 4.\frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

**Ví dụ 5**: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B, AB = a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng qua A vuông góc với SC cắt SB, SC lần lượt tại H, K. Tính theo a thể tích khối tứ diện SAHK.

**Giải**



Trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{SK}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{6a^2} = \frac{2}{3}$$

Tương tự ta có: $\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$

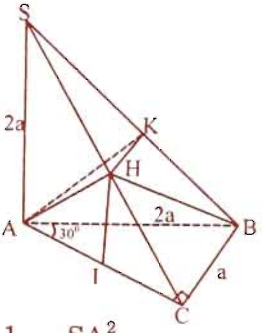
Ta có: $\frac{V_{SAHK}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SC} = \frac{8}{15}$

Mà $V_{SABC} = \frac{1}{6}AB.BC.SA = \frac{a^3}{3}$ Suy ra $V_{SAHK} = \frac{8a^3}{45}$

**Ví dụ 6:** Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA bằng 2a, tam giác ABC vuông ở C có AB = 2a, $\widehat{CAB} = 30^\circ$ Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB.

a) Chứng minh rằng AH ⊥ SB và SB ⊥ (AHK).

b) Tính thể tích khối đa diện ABCHK.



**Giải**

a) Ta có AH ⊥ SC, AH ⊥ CB (do CB ⊥ (SAC))
Suy ra AH ⊥ (SBC) ⇒ AH ⊥ SB.
Mà SB ⊥ AK, suy ra SB ⊥ (AHK).

b) Tam giác SAB cân ở A nên $SK = \frac{1}{2}SB$.

Ta có:

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SC}.\frac{SK}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}\frac{SH.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SA^2 + AC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2\cos^2 30^\circ} = \frac{2}{7} \Rightarrow V_{ABCHK} = \frac{5}{7}V_{S.ABC}$$

Mà $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{ABCHK} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{21}$

**Ví dụ 7**: Cho tứ diện ABCD và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$ và tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện ABCD được phân chia bởi mặt phẳng (MNP).

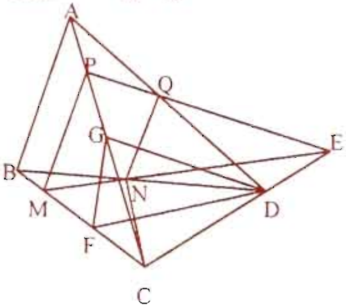
**Giải**

Gọi E = MN ∩ CD. Khi đó Q = PE ∩ AD. Gọi F là trung điểm của BC và G là điểm trên AC sao cho DG // PQ.

Ta có FD // MN.

Ta có: $\frac{AG}{AP} = 1 + \frac{PG}{AP} = 1 + \frac{2PG}{PC} = 1 + \frac{2ED}{EC} = 1 + \frac{2MF}{MC} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

Suy ra: $\frac{AQ}{AD} = \frac{AP}{AG} = \frac{3}{5}$.



Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, $V_1$ là thể tích khối đa diện ABMNQP, $V_2$ là thể tích khối đa diện CDNMPQ.

Khi đó $V_2 = V - V_1$

Ta có: $V_1 = V_{ABMN} + V_{AMPN} + V_{APQN}$

ABC

Vì $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{4}, \dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \dfrac{1}{8}, \dfrac{S_{MNC}}{S_{BCD}} = \dfrac{3}{8};\ \dfrac{S_{DNC}}{S_{BCD}} = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $V_{ABMN} = \dfrac{1}{8}V \quad V_{AMNP} = \dfrac{1}{3}V_{AMNC} = \dfrac{1}{8}V$

$$V_{APQN} = \frac{1}{3}.\frac{3}{5}V_{ADNC} = \frac{1}{10}V$$

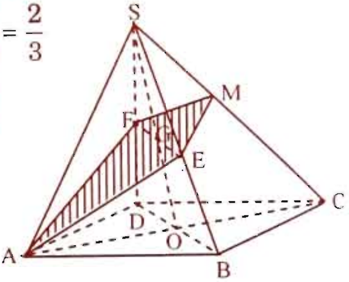
Do đó $V_1 = \dfrac{7}{20}V$, suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{13}$

**Ví dụ 8:** Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC. Một mặt phẳng ($\alpha$) đi qua AM và song song với BD chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

**Giải:**

Gọi O là tâm của đáy ABCD, AM cắt SO tại G

Vì G là trọng tâm của tam giác SAC nên $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$



Mặt khác mp($\alpha$) // BD nên sẽ cắt mp(SBD) theo giao tuyến EF qua G và song song với BD (E $\in$ SB, F $\in$ SD), vì vậy:

$$\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$$

Vì EF // BD và OB = OD

Nên GE = GF, $S_{AEM} = S_{AFM}$.

Vậy: $\dfrac{V_{SAEMF}}{V_{SABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}V_{SAEMF}}{\frac{1}{2}V_{SABCD}} = \dfrac{V_{SAEM}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SE}{SB}.\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

**Ví dụ 9**: Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng ($\alpha$) đi qua A, B và trung điểm M của cạnh SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

**Giải**

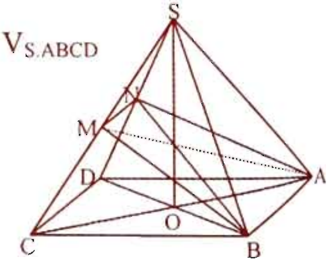
Vẽ MN // CD (N $\in$ SD) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mp(ABM).

Ta có:

$$\frac{V_{S.ANB}}{V_{S.ADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ANB} = \frac{1}{2}V_{S.ADB} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM}{SC}\ \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

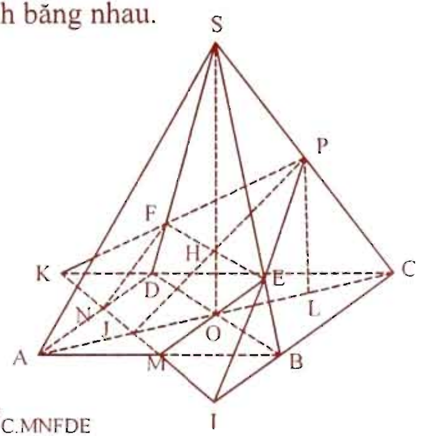
$$\Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V_{S.BCD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$$



ABC

Vậy: $V_{S.ABMN} = V_{S.ANB} + V_{S.BMN} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD}$ Do đó $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$

**Ví dụ 10**: Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SC. Chứng minh mặt phẳng (MNP)) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.



### Giải

Đường thẳng MN cắt CD, BC tại K, I.

PI cắt SB tại E, PK cắt SD tại F

Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo thiết diện MNFPE, chia thể tích ra hai phần, gọi $V_1$ là thể tích phần chứa đỉnh S và $V_2$ là phần còn lại.

Ta có $V_1 = V_{S.MNFPE} + V_{S.AMN}$

$$V_2 = V_{C.MNFPE} + V_{E.MBC} + V_{F.NDC}$$

Vì P là trung điểm SC nên $V_{S.MNFPE} = V_{C.MNFDE}$

Ta có:SO = 2PL = 4HO nên d(E, (ABCD))

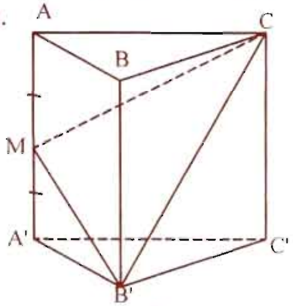
$$= d(F, (ABCD)) = \frac{1}{4}d(S, (ABCD))$$

Và $S_{MBC} = S_{NDC} = 2S_{AMN}$ nên $V_{S.AMN} = V_{E.MBC} + V_{F.NDC}$

Vậy $V_1 = V_2$

Cách khác: Dùng tỉ số thể tích.

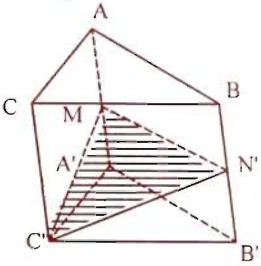
**Ví dụ 11**: Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Mặt phẳng đi qua M, B', C chia khối lăng trụ thành hai phần. Chứng minh thể tích của hai phần đó bằng nhau.



### Giải

Mặt phẳng (MCB') chia khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' thành hai khối chóp: C.MABB' và B'MA'C'C. Hai khối chóp đó có chiều cao bằng nhau (bằng chiều cao của tam giác đều ABC), có đáy là hai hình thang vuông bằng nhau. Vậy hai khối chóp đó có thể tích bằng nhau.

**Ví dụ 12**: Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB' Mặt phẳng (MNC') chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.



ABC

**Giải**

Nếu gọi V là thể tích của khối lăng trụ thì thể tích của khối tứ diện C'ABC là $\frac{V}{3}$, do đó thể tích của khối chóp C'.ABB'A là $\frac{2V}{3}$

Vì hai khối chóp C'.ABNM và C'MNB'A' có cùng chiều cao và có mặt đáy bằng nhau nên thể tích của khối chóp C'.MNB'A' là: $V_1 = \frac{1}{2}\,\frac{2V}{3} = \frac{V}{3}$

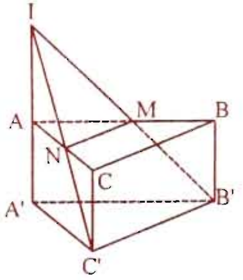
Do đó tỉ số thể tích hai phần được phân chia là $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

**Ví dụ 13:** Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

**Giải**

Gọi I là giao điểm của đường thẳng MB' và đường thẳng AA', N là giao điểm của IC' và AC. Thiết diện của khối lăng trụ khi cắt bởi mp(B'C'M) là hình thang B'C'NM.

Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần, gọi $V_1$ là thể tích của phần chứa cạnh AA' và $V_2$ là thể tích phần còn lại.



Giả sử khối lăng trụ ABC.A'B'C' có diện tích đáy là S và chiều cao AA' = h. Ta có:

$$V_1 = V_{AMN.A'B'C'} = V_{I.A'B'C'} - V_{I.AMN} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}\,.\,IA' - \frac{1}{3}S_{AMN}.IA$$

$$= \frac{1}{3}S.2h - \frac{1}{3}\frac{S}{4}h = \frac{7}{12}Sh = \frac{7}{12}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{7}{12}(V_1 + V_2)$$

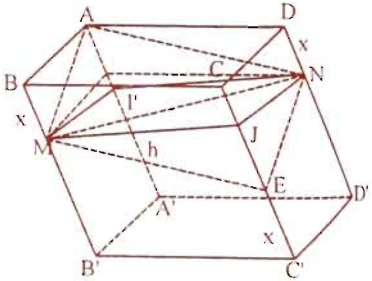
Suy ra: $12V_1 = 7(V_1 + V_2)$ hay $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$

**Ví dụ 14**: Cho một khối hộp ABCD.A'B'C'D' có AA' = h. Trên BB' và DD' lấy hai điểm M và N sao cho $BM = DN = x < \frac{h}{2}$ Mặt phẳng (AMN) chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

**Giải**

Ta có mp(AMN) cắt khối hộp theo một hình bình hành AMEN, với E nằm trong đoạn CC' mà C'E = x. Qua MN vẽ một mặt phẳng song song với mp(ABCD) cắt khối hộp theo hình bình hành MJNI.

Gọi $V_1$ là thể tích phần khối hộp nằm giữa thiết diện AMEN và mp(A'B'C'D') và $V_2$ là thể tích phần còn lại của khối hộp.



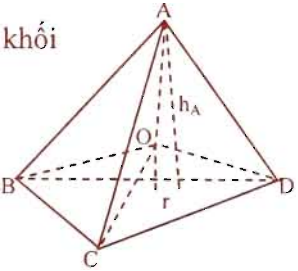
Ta có $V_1 = V_{MJNA'B'C'D'} - V_{JMNE} + V_{IAMN}$

Vì $V_{JMNE} = V_{IAMN}$ nên $V_1 = V_{IMJNA'B'C'D'}$. Do đó $V_2 = V_{IMJNABCD}$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{MB'}{BM} = \dfrac{h-x}{x}$.

**Ví dụ 15**: Cho tứ diện ABCD có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng r (tâm mặt cầu nội tiếp) Gọi $h_A$, $h_B$, $h_C$, $h_D$ lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_A} + \dfrac{1}{h_B} + \dfrac{1}{h_C} + \dfrac{1}{h_D}$

**Giải**



Khối tứ diện ABCD được phân chia thành bốn khối tứ diện OBCD, OCAD, OABD, OABC, ta có:

$$\frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_A}, \frac{V_{O.CAD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_B}$$

$$\frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_C}, \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_D}$$

Cộng lại thì $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = r\left(\dfrac{1}{h_A} + \dfrac{1}{h_B} + \dfrac{1}{h_C} + \dfrac{1}{h_D}\right) = 1$

Do đó $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_A} + \dfrac{1}{h_B} + \dfrac{1}{h_C} + \dfrac{1}{h_D}$.

**Ví dụ 16**: Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong một hình lăng trụ đều đến các mặt của nó không phụ thuộc vào vị trí của điểm nằm trong hình lăng trụ đó.

**Giải**

Gọi hình lăng trụ đều đã cho là H có diện tích đáy S, cạnh đáy a và chiều cao h. Khi đó tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong H đến hai mặt đáy của nó luôn bằng chiều cao h của H.

Giả sử I là một điểm trong nào đó của H. Dựng qua I một mặt phẳng (P) vuông góc với cạnh bên của H ta được thiết diện thẳng $A_1 A_2 \dots A_n$ là một đa giác đều bằng đa giác đáy.

Từ I ta hạ đường $IH_1 \perp A_1A_2$, $IH_2 \perp A_2A_3$, ..., $IH_n \perp A_nA_1$.

Do thiết diện thẳng vuông góc với các mặt bên, nên $IH_1$, $IH_2$, ..., $IH_n$ lần lượt vuông góc với các mặt bên của hình lăng trụ.

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}aIH_1 + \dfrac{1}{2}aIH_2 + \dots + \dfrac{1}{2}aIH_n$

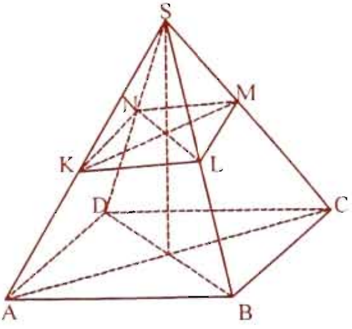
$= \dfrac{1}{2}a(IH_1 + IH_2 + \dots + IH_n)$.

$\Rightarrow IH_1 + IH_2 + \dots + IH_n = \dfrac{2S}{a}$ Vậy tổng các khoảng cách từ I đến các mặt của lăng trụ bằng: $h + \dfrac{2S}{a}$: không đổi.

**Ví dụ 17**: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N. Chứng minh:

a) $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$.

b) $\dfrac{SA}{SK} + \dfrac{SC}{SM} = \dfrac{SB}{SL} + \dfrac{SD}{SN}$.



**Giải**

a) Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD có diện tích bằng nhau và bằng nửa diện tích S của hình bình hành ABCD và các hình chóp S.ABC, S.ACD, S.ABD, S.BCD có chiều cao bằng nhau và bằng chiều cao h của hình chóp S.ABCD. Vậy:

$$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{V}{2}$$

b) Ta có $V_{SKLM} + V_{SKNM} = V_{SKLN} + V_{SMLN}$

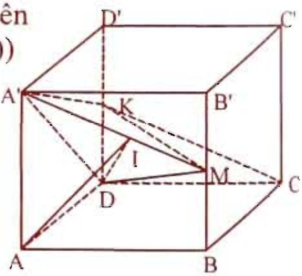
$$\Rightarrow \frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SKNM}}{V_{SADC}} = \frac{V_{SKLN}}{V_{SABD}} + \frac{V_{SMLN}}{V_{SCBD}}$$

$$\Rightarrow \frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC} + \frac{SK}{SA}\ \frac{SN}{SD}\ \frac{SM}{SC} = \frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD} + \frac{SM}{SC}.\frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}$$

Nhân 2 vế với $\dfrac{SA}{SK}.\dfrac{SB}{SL}.\dfrac{SC}{SM}.\dfrac{SD}{SN}$ thì được đpcm.

**Ví dụ 18**. Khối lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. K là trung điểm của DD'  Tính khoảng cách giữa CK và A'D.

**Giải**



Gọi M là trung điểm của BB'. Ta có A'M // KC nên

$$d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD)) = d(K, (A'MD))$$

Đặt d(CK, A'D) = x. Ta có:

$$V_{A'MDK} = V_{K.A'MD} = \frac{1}{3}S_{A'MD}.x$$

Mặt khác $V_{A'MDK} = V_{M.A'DK}$

$$= \frac{1}{3}S_{A'DK}.d(M, (A'DK)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a.\ \frac{1}{2}a\right)a = \frac{a^3}{12}$$

Do đó $S_{A'MD}\ .\ x = \dfrac{a^3}{4}$ Hạ $DI \perp A'M \Rightarrow AI \perp A'M$

$$\Rightarrow AI\ .\ A'M = AA'.d(M, AA') = a^2$$

$$\Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}} \text{ nên } DI^2 = DA^2 + AI^2 = a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{9a^2}{5} \Rightarrow DI = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

Nên $S_{A'MD} = \dfrac{1}{2}DI.A'M = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3a}{\sqrt{5}}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3a^2}{4}$

Vậy $d(CK, A'D) = x = \dfrac{a}{3}$

**Ví dụ 19:** Cho hình chóp S.ABC có SA = a, SB = b, SC = c, và $\widehat{ASB} = 30^\circ$ $\widehat{BSC} = 45^\circ$ , $\widehat{CSA} = 60^\circ$ Tính thể tích hình chóp S.ABC theo a, b, c.

**Giải**

Trên ba cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho SM = SN = SP = 1

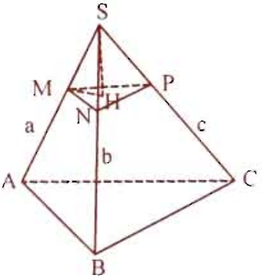
Gọi H là hình chiếu của S lên (MNP) ta có:

SM = SN = SP, HM = HN = HP

⇒ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP

Theo định lý hàm số côsin ta có:

$$MN = \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad NP = \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad MP = 1.$$



nên $S_{MNP} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}}{2\sqrt{2}}$

Vì MH là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP nên:

$$MH = \frac{MN.NP.PM}{4S_{MNP}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}.\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}} = \frac{\sqrt[4]{2}.\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}$$

$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}}{2}$$

$$V_{SMNP} = \frac{1}{3}S_{MNP}.SH = \frac{1}{12\sqrt[4]{2}}\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}$$

Ta có $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \dfrac{SA}{SM}.\dfrac{SB}{SN}.\dfrac{SC}{SP} = abc$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{abc\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}}{12\sqrt[4]{2}}$$

**Ví dụ 20:** Cho hình chóp tứ giác có tất cả các cạnh bằng 1. Một mặt phẳng qua một cạnh đáy, chia hình chóp làm 2 phần tương đương. Tính chu vi thiết diện.

**Giải**

Hình chóp S.ABCD có các cạnh bằng 1 nên hình chiếu của S lên đáy là H cách đều A, B, C, D do đó hình thoi ABCD là hình vuông nên hình chóp là hình chóp đều.

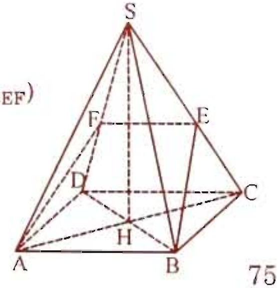
Mặt phẳng qua cạnh AB cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang cân ABEF.

Đặt EF = x thì SE = SF = x

$$AF^2 = BE^2 = x^2 + 1 - 2x.\cos 60^\circ = x^2 - x + 1.$$

Theo giả thiết: $V_{S.ABCD} = 2.V_{S.ABEF} = 2(V_{SABF} + V_{SBEF})$

Mà $\dfrac{V_{SABF}}{V_{SABD}} = \dfrac{SF}{SD} = x \quad \dfrac{V_{SBEF}}{V_{SBCD}} = \dfrac{SE}{SC}.\dfrac{SF}{SD} = x^2$



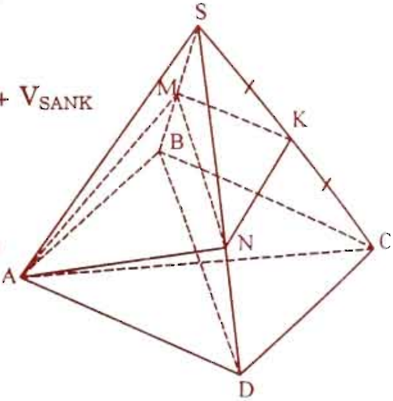
ABC

nên $x^2 + x - 1 = 0$, chọn $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Chu vi thiết diện: $C = AB + EF + 2BE = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$.

**Ví dụ 21:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt SB,SD tại M, N. Đặt $V_1 = V_{SAMNK}$ và $V = V_{SABCD}$. Chứng minh: $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{V_1}{V} \le \dfrac{3}{8}$

**Giải**



Đặt $x = \dfrac{SM}{SB}$ ; $y = \dfrac{SN}{SD}$ Ta có $V_1 = V_{SAMK} + V_{SANK}$

$$\frac{V_{SAMK}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB}\frac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SAMK} = \frac{xV}{4}$$

Tương tự $V_{S.ANK} = \dfrac{yV}{4} \Rightarrow V_1 = \dfrac{V}{4}(x+y)$

Mà $V_1 = V_{SAMN} + V_{SMNK}$

$$= \frac{xyV}{2} + \frac{xyV}{4} = \frac{3xyV}{4}$$

Do đó $x + y = 3xy \Rightarrow y = \dfrac{x}{3x-1}, x > \dfrac{1}{3}$

Vì $y = \dfrac{SN}{SD} \le 1 \Rightarrow \dfrac{x}{3x-1} \le 1 \Rightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3}{4}xy = \dfrac{3x^2}{4(3x-1)}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2}{4(3x-1)}$ với $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

BBT:

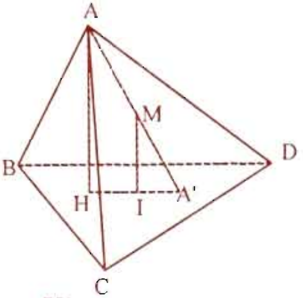
| x | 1/2 | | 2/3 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | 0 | + | |
| f | 3/8 | ↘ | 1/3 | ↗ | 3/8 |

Vậy $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{V_1}{V} \le \dfrac{3}{8}$

**Ví dụ 22:** Cho điểm M trong tứ diện ABCD. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt mặt đối diện tại A', B',C' D' tương ứng

Tìm GTNN của $T = \dfrac{MA}{MA'} + \dfrac{MB}{MB'} + \dfrac{MC}{MC'} + \dfrac{MD}{MD'}$.

## Giải



Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A, M lên mặt phẳng (BCD). Ta có H, I, A' thẳng hàng. Gọi V, $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ lần lượt là thể tích của tứ diện ABCD và 4 hình chóp đỉnh M với các đáy là các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Ta có:

$$\frac{AA}{MA'} = \frac{AH}{MI} = \frac{\frac{1}{3}AH.S_{BCD}}{\frac{1}{3}MI.S_{BCD}} = \frac{V}{V_1} \Rightarrow \frac{MA}{MA'} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1$$

Tương tự $\frac{MB}{MB'} = \frac{V}{V_2} - 1$ , $\frac{MC}{MC'} = \frac{V}{V_3} - 1$   $\frac{MD}{MD'} = \frac{V}{V_4} - 1$

$$\Rightarrow T = V\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_4}\right) - 4$$

$$= (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_4}\right) - 4 \geq 16 - 4 = 12.$$

Vậy minT = 12 $\Leftrightarrow$ M là trọng tâm tứ diện ABCD.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Biết SA = b và góc giữa mặt bên và đáy bằng α, tính thể tích khối chóp.

**ĐS :** $V = \frac{b^3\sqrt{3}\tan\alpha}{\sqrt{(\tan^2\alpha + 4)^3}}$

**Bài 2:** Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

**ĐS :** $AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}$ cm

**Bài 3**: Cho góc tam diện Sxyz với $\widehat{xSy} = 120^0$ $\widehat{ySz} = 60^0$ $\widehat{zSx} = 90^0$ Trên các tia Sx, Sy, Sz theo thứ tự lấy các điểm A, B, C sao cho: SA = SB = SC = a.

1) Chứng tỏ rằng tam giác ABC vuông. Xác định hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC). Tính thể tích tứ diện SABC theo a.
2) Tính góc của 2 mặt phẳng (SAC), (BAC).

**ĐS :** 1) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$  2) $\widehat{SKH} = 45^0$

**Bài 4**: Cho tứ diện ABCD có AB = BC = CA = AD = DB = $a\sqrt{2}$ và CD = 2a..

1) Chứng minh rằng AB vuông góc với CD. Hãy xác định đường vuông góc chung của AB và CD.

ABC

2) Tính thể tích tứ diện ABCD.

**ĐS :** 2) $V_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$

**Bài 5**: Cho tứ diện ABCD có $\widehat{BAD} = 90^0$ $\widehat{CAD} = \widehat{ACB} = 60^0$ và AB = AC = AD = a. Tính thể tích tứ diện ABCD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

**ĐS :** $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ và $d(AC; BD) = \frac{a}{2}$

**Bài 6**: Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác đều cạnh a, SA = 2a, SA vuông góc (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu A lên SB, SC. Tính thể tích khối A.BCNM.

**ĐS :** $V = \frac{3\sqrt{3}.a^3}{50}$

**Bài 7**: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AB = b. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, lấy điểm S sao cho SA = h (h > 0). M là một điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là các trung điểm của BC và AB.

1) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SI và AB.
2) Tính tỉ số giữa thể tích các hình chóp BMIJ và BSCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

**ĐS :** 1) $\frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4^2}}$ 2) $\frac{V_{BMIJ}}{V_{BSCA}} = \frac{1}{8}$

**Bài 8**: Cho một tam diện vuông đỉnh O. Trên ba cạnh của tam diện ấy lấy ba điểm A, B, C sao cho: AC = 2OB, BC = 2OA.

1) Gọi M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ O xuống AC và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC.
2) Tính $\cos\widehat{MON}$

**ĐS :** 2) $\cos\widehat{MON} = \frac{1}{4}$

**Bài 9**: Cho hình chóp tam giác SABC có SA = x, BC = y, các cạnh còn lại đều bằng 1.

1) Thể tích hình chóp theo x, y
2) Với x, y nào thì thể tích hình chóp lớn nhất?

**ĐS :** 1) $V = \frac{xy}{6}\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{4}}$ 2) $x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$

**Bài 10**: Cho tam giác đều OAB có cạnh AB = a Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M với OM = x. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt d tại N.

1) Chứng minh rằng: AN ⊥ BM.

2) Xác định x để thể tích tứ diện ABMN nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

**ĐS :** 2) $x= \frac{a\sqrt{2}}{2}$. lúc đó $V_{ABMN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{12}$

**Bài 11:** Tính thể tích hình chóp tam giác đều S.ABC biết AB = a, SA = *l*. Suy ra thể tích tứ diện đều

**ĐS:** $V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3l^2 - a^2}$

**Bài 12:** Tính thể tích hình chóp tam giác đều S.ABC biết SA= *l* và góc giữa cạnh bên và đáy bằng $\alpha$.

**HD:** Hạ SH vuông góc đáy, xét tam giác vuông SAH.

**Bài 13:** Tính thể tích hình chóp S.ABC biết 3 cạnh SA=a, SB =b, SC = c và đôi một hợp nhau góc $60^0$

**HD:** dùng tứ diện đều đỉnh S.

**Bài 14:** Tứ diện OABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc nhau. Hạ OH $\perp$ (ABC).Tính đường cao OH và chứng minh.

$S^2(ABC) = S^2(OAB) + S^2(OBC) + S^2(OCA)$

**HD:** chia tam giác ABC thành 3 tam giác.

**Bài 15:** Tứ diện OABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc nhau. Chứng minh tam giác ABC nhọn và tính thể tích.

**HD:** Dùng định lý cosin.

**Bài 16:** Hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC), SA = 7 và AC = 8, AB = 6 , BC = 10. Tính thể tích và tính khoảng cách từ A đến (BCD).

**HD:** $\Delta$ABC vuông.

**Bài 17:** Hình chóp cụt tam giác đều có cạnh đáy lớn 2a, đáy nhỏ là a, góc của đường cao với mặt bên là $30^0$ Tính $S_{tp}$ và tính V.

**ĐS:** $V = \frac{7a^3\sqrt{3}}{24}$

**Bài 18:** Một hình tứ diện có các cạnh đối bằng nhau. Chứng minh tồn tại điểm cách đều các đỉnh và các mặt của tứ diện.

**ĐS:** trọng tâm G.

**Bài 19:** Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (BCD). Chứng minh KB, KC, KD đôi một vuông góc và tính thể tích hình chóp H.BCD.

**HD:** định lý Pitago.

**Bài 20:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có SA = 2AB. Tính tỉ số thể tích do mặt phẳng (P) qua AB, vuông góc SC chia ra.

**HD:** hạ AM $\perp$ SC thì BM $\perp$ SC

**Bài 21:** Cho hình chóp tam S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, BA = c, góc $\widehat{BAC} = \alpha$ và SA = SB = SC = b. Tính khoảng cách từ B đến (SAC) và tính thể tích hình chóp.

**HD:** hình chiếu của S lên đáy là trung điểm cạnh AC.

**Bài 22:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$.

**HD:** dùng 3 trung điểm cạnh BC, CA và AD.

**Bài 23:**Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, M là trung điểm của CD. Chứng minh AO vuông góc với CD và tính cos(AC,BM).

**ĐS:** $\cos(AC,BM)= \frac{\sqrt{3}}{6}$

**Bài 24:**Cho tứ diện ABCD, gọi $G_1$, $G_2$, $G_3$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACD, ADB.

1) Tính diện tích thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng $(G_1 G_2 G_3)$, biết diện tích tam giác BCD là s.
2) M là điểm di động bên trong tứ diện sao cho $G_1M$ luôn song song với mặt phẳng (ACD). Tìm tập hợp M.

**ĐS:** 1) $\frac{4}{9}s$.

**Bài 25:**Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = CD = a$ và AB vuông góc với CD. Lấy một điểm M trên cạnh AC với $AM = x$ $(0 < x < a)$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua M song song với AB và CD cắt BC, BD, AD tại N, P, Q. Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật và tìm diện tích lớn nhất.

**ĐS:** $\frac{a^2}{4}$

**Bài 26**: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Biết trung đoạn bằng d và góc giữa cạnh bên và đáy bằng φ, tính thể tích của khối chóp.

**ĐS :** $V = \frac{4\sqrt{2}d^3\tan\varphi}{3\sqrt{(2\tan^2\varphi+1)^3}}$.

**Bài 27**: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, tất cả các cạnh đều bằng a.

1) Tính thể tích hình chóp.
2) Tính khoảng cách từ tâm mặt đáy ABCD đến các mặt bên của hình chóp.

**ĐS :** 1) $V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ 2) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

**Bài 28**: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ $(0^0 < \varphi < 90^0)$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

**ĐS :** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\varphi$

**Bài 29**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Lấy M, N lần lượt trên các cạnh SB SD sao cho: $\frac{SM}{BM} = \frac{SN}{DN} = 2$

ABC

1) Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC tại P. Tính tỉ số $\frac{SP}{CP}$

2) Tính thể tích hình chóp SAMPN theo thể tích của hình chóp S.ABCD.

**ĐS :** 2) $V_{SAMPN} = \frac{1}{3} V_{SABCD}$

**Bài 30**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm cạnh SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$ và tính thể tích khối CMNP.

**ĐS :** $V_{CMNP} = \frac{\sqrt{3}.a^3}{96}$

**Bài 31**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC. Tính thể tích khối chóp S.BMDN và cosin của góc giữa 2 đường thẳng SM, DN

**ĐS :** $V_{S.BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$, $\cos(SM, DN) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**Bài 32**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều với AD = 2a, AB = BC = CD = a và đường cao $SO = a\sqrt{3}$ trong đó O là trung điểm của AD.

1) Tính thể tích hình chóp SABCD.

2) Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng qua A và vuông góc với SD. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng $(\alpha)$.

**ĐS :** 1) $V = \frac{3a^3}{4}$

**Bài 33**: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = AB = a.

1) Tính diện tích tam giác SBD theo a.

2) Chứng minh rằng $BD \perp SC$ và tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).

**ĐS :** 1) $S_{SBD} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$ 2) $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

**Bài 34:** Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm I. Các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và ở về cùng một phía đối với mặt phẳng đó. Cho điểm M không trùng với A trên Ax, cho điểm N không trùng với C trên Cy. Đặt AM = m, CN = n.

1) Tính thể tích của hình chóp B.AMNC.

2) Tính $MN^2$ theo a, m, n và tìm điều kiện đối với a, m, n để góc $\widehat{MIN}$ là góc vuông.

**ĐS :** 1) $V = \frac{1}{6}(m+n)a^2$ 2) $a^2 - 2mn = 0$.

ABC

**Bài 35:** Cho hình chóp S.ABCD. Trong mặt phẳng đáy vẽ đường thẳng d qua A và không song song với cạnh đáy. Lấy M trên SC. Tìm thiết diện cắt bởi mp(d,M).

**HD:** d cắt đường thẳng CB,CD

**Bài 36:** Cho hình chóp S.ABCD, M thuộc miền trong tam giác SAB. Tìm giao điểm của đường thẳng MC với (SAD), (SBD).

**HD:** chọn mặt phẳng phụ.

**Bài 37:** Cho hình chóp S.ABCD. Lấy M trong tam giác SAD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MBC).

**HD:** Xét quan hệ AD và BC.

**Bài 38:** Cho hình chóp S.ABCD đáy hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm SD, SA. Tìm thiết diện cắt bởi (MNO).

**HD:** dùng giao tuyến song song.

**Bài 39:** Cho hình chóp S.ABCD .Một mặt phẳng lưu động qua 2 điểm I, J cố định của SA, SC. Mặt phẳng này cắt SB, SD tại M, N.
Chứng minh MN đi qua 1 điểm cố định.

**ĐS:** giao điểm của MN và (SAC).

**Bài 40:** Cho hình chóp S.ABCD. Một mặt phẳng (P) lưu động cắt 4 cạnh bên theo thiết diện tứ giác. Tìm tập hợp các giao điểm của 2 đường chéo thiết diện.

**ĐS:** SO với O là giao điểm 2 đường chéo đáy.

**Bài 41:**Cho hình chóp S.ABCD đáy hình thang với các cạnh đáy AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

**ĐS:** AB = 3CD

**Bài 42:**Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm tam giác SAD. Tìm giao điểm J, K của (OMG) với AD, SA. Tính $\frac{JA}{JD};\frac{KA}{KS}$

**ĐS:** $\frac{JA}{JD}=2;\frac{KA}{KS}=2.$

**Bài 43:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Gọi C’ là trung điểm của SC, M là một điểm di động trên cạnh SA, (P) là mặt phẳng di động luôn qua C’M và song song với BC. Chứng minh (P) luôn chứa một đường thẳng cố định và tìm tập hợp giao điểm của hai cạnh đối của thiết diện cắt bởi (P).

**HD:** tập hợp giao điểm là giao tuyến.

**Bài 44:** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD) và SA = a. Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh AI vuông góc với (SCD) và tính thể tích hình chóp.

**ĐS:** $V = \frac{1}{3}a^3$

**Bài 45:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc A = $\alpha$ và SA = SB = SC = a. Chứng minh tam giác SBD vuông và tính diện tích toàn phần hình chóp.

**HD:** $SO = \frac{1}{2}BD$.

**Bài 46:** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $\alpha$ chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) cắt theo thiết diện ABEF Tính thể tích khối S.ABMN

**HD:** diện tích thiết diện $\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$

**Bài 47:** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a, SA= a và vuông góc với đáy. Chứng minh (SAC) vuông góc với (SCB) và tính thể tích khối chóp.

**HD:** AC vuông góc CB.

**Bài 48:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a tâm O, các cạnh bên đều bằng a. Tính thể tích và khoảng cách SA, CD.

**HD:** đường cao SO

**Bài 49:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a, mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Tính thể tích khối chóp.

**HD:** giao tuyến SA vuông góc đáy.

**Bài 50:** Hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a. SA vuông góc với đáy ABCD và SA = b. Xác định đoạn vuông góc chung của SB với AB và tính thể tích.

**ĐS:** $V = \frac{1}{3}a^2b$

**Bài 51:** Hchóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. Hạ AH $\perp$ (SBD). Chứng minh $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$

**HD:** tam diện góc A vuông.

**Bài 52:** Hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a và SA = SB = SC = SD = $a\sqrt{2}$. Tính thể tích và góc giữa hai đường thẳng AD và SB

**HD:** hình chiếu của S là tâm O của đáy.

**Bài 53:** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mp (ABCD) và SA = 4a. Gọi I, M là trung điểm của SC, AB. Tính thể tích khối I.AMCD và khoảng cách từ M đến BI

**HD:** d(I,.AMCD) = 2a

**Bài 54:** Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O.

ABC

Mặt phẳng qua A và trung điểm M của SO, song song với BD chia khối chóp làm 2 phần. Tính tỉ số thể tích .

**HD:** chia ra 2 khối chóp tam giác và dùng tỉ số thể tích

**Bài 55:** Tính thể tích hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết SA = a và góc giữa cạnh bên và đáy bằng $\alpha$ .

**HD:** $\alpha$ là góc SAO, O là tâm của đáy.

**Bài 56:** Tính thể tích hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết SA = b và góc giữa mặt bên và đáy bằng $\alpha$ .

**HD:** $\alpha$ là góc SMO, O là tâm của đáy và M là trung điểm BC

**Bài 57:** Tính thể tích hình chóp lục giác đều S.ABCDEF biết SA = b và góc giữa cạnh bên và đáy bằng $60^0$

**HD:** hình chiếu của S là O là tâm của đáy.

**Bài 58:** Tính thể tích hình chóp n- giác đều biết cạnh đáy a và cạnh bên b.

**HD:** chia đáy làm n tam giác cân, cạnh đáy a và góc ở đỉnh $\frac{360^0}{n}$

**Bài 59:** Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A’B’C’D’ có đáy là hình vuông cạnh a, AC’ = $a\sqrt{3}$ Tính thể tích khối chóp A.A’B’C’D’

**HD:** chiều cao AA’

**Bài 60:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác đều cạnh a, AA $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Tính thể tích khối chóp A’.BCC’B’

**ĐS:** $\frac{a^3}{4}$.

**Bài 61:** Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh a. Trên hai tia Bx và Dy vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và cùng chiều, lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM.DN = \frac{a^2}{2}$. Đặt $\widehat{BOM} = \alpha$, $\widehat{DON} = \beta$

Chứng minh $\tan\alpha.\tan\beta = 1$ và tính thể tích khối chóp A.BDMN.

**HD:** BDMN là hình thang vuông.

**Bài 62:** Hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = a, BC = b, CC’ = c. Tính góc AB’  BC’ và tính diện tích hình chóp A.CDA’B’

**HD:** dùng vectơ để tính góc.

**Bài 63:**Hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = a, BC = b, CC’ = c. Tính khoảng cách giữa AB’, BC’ và thể tích khối A.CDA’B’

**HD:** CDA’B’ là hình chữ nhật.

**Bài 64**: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

1) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A_1B$ và $B_1D$.
2) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh $BB_1$, CD, $A_1D_1$. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C_1N$.

**ĐS :** 1) $d(A_1B, B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

ABC

**Bài 65**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi K và L lần lượt là trung điểm của các cạnh B'C' và C'D'.

1) Hãy xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (AKL).
2) Tính diện tích của thiết diện.

**ĐS :** $S = \frac{7\sqrt{17}}{24}a^2$

**Bài 66**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi K là trung điểm của cạnh BC và I là tâm của mặt bên CC'D'D.

1) Hãy xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (AKI).
2) Tính thể tích của các khối đa diện do mặt phẳng (AKI) chia ra trên hình lập phương.

**Bài 67**: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c

1) Tính khoảng cách từ B tới mp(ACC'A').
2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

**ĐS :** 1) $BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 2) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

**Bài 68**: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có: AB = AA' = a và AD = 2a.

1) Chứng minh AB' vuông góc với BD' và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB' và C'D'.
2) Tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (B'CD')

**ĐS :** 1) d(AB', C'D') = 2a 2) $d(C', (B'D'C)) = \frac{2a}{3}$

**Bài 69**: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' và điểm M trên cạnh AD. Mặt phẳng (A'BM) cắt đường chéo AC' của hình hộp tại điểm H.

1) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AD thì đường thẳng MH cắt đường thẳng AB tại một điểm cố định.
2) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo bởi mặt phẳng (A'BM) cắt hình hộp trong trường hợp M là trung điểm của cạnh AD.

**ĐS :** 2) tỉ số thể tích là $\frac{V''}{V'} = \frac{1}{11}$

**Bài 70**: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

**ĐS :** $AA' = a\sqrt{2}$.

**Bài 71**: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC. Tính thể tích lăng trụ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM, B'C.

**ĐS :** 1) $V = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ 2) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

ABC

**Bài 72**: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên 2a, đáy là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu đỉnh A' trên mp(ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối chóp A'.ABC và cosin của góc giữa 2 đường thẳng AA', B'C'.

**ĐS :** $V_{A'.ABC} = \frac{a^3}{2}$ $\cos\varphi = \frac{1}{4}$

**Bài 73:** Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh a. Xác định và tính diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng đi qua 3 trung điểm:

1) I, J, K của 3 cạnh B’B , BA , AD.

2) M, N, P của 3 cạnh AB, B’C’, DD’

**HD:** có nhiều cách tính, có thể dùng $S' = S.\cos\alpha$

**Bài 74:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = b, AD = d và AA’ = c. Tìm điểm G trong tam giác A’DB mà A, G, C’ thẳng hàng. Tính thể tích khối G. ABCD.

**HD:** G trọng tâm của tam giác A’DB

**Bài 75:** Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ .Mặt phẳng lưu động qua BD cắt A’B’, A’D’ tại M, N. Tìm quỹ tích giao điểm P của MB và DN; Q của MD và NB.

**HD:** quỹ tích thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng chứa 2 đường thẳng lưu động.

**Bài 76:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = b, AD = d và AA’ = c. Chứng minh (AB’C) // (DA’C’) và tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng đó.

**ĐS:** $\frac{1}{3}\sqrt{b^2+c^2+d^2}$

**Bài 77:** Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ với các cạnh bên là AA’ BB’, CC’. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

1) Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB’C’) với đường thẳng A’M.

2) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB’C’) và (BA’C’). Gọi G giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (AMA’), chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB’C’

**HD:** G thuộc 1 trung tuyến và có tỉ số $\frac{1}{3}$.

**Bài 78:** Cho một hình lăng trụ ABCD.A’B’C’D’, đáy là hình thang AB//CD có AD = CD = BC = a, AB = 2a. Mặt phẳng (P) qua A cắt các cạnh BB’, CC’, DD’ lần lượt tại M, N, P. Cho góc BCC’ = ADB’ = $60^0$ và BM = 3a. Định (P) để AMNP là hình thang cân.

**HD:** $PD = \frac{5}{4}a$.

**Bài 79:** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A’B’C’ cạnh đáy a, cạnh bên b. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA’ và AC.Tính diện tích thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNB’).

**HD:** thiết diện là tứ giác.

**Bài 80:** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A’B’C’ cạnh đáy a, AB’ hợp với đáy góc $\alpha$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA’ AC, B’C. Tính thể tích và diện tích thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNP).

**HD:** thiết diện là ngũ giác.

**Bài 81:** Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh a. Trên AB, CC’. C’D’ và AA’ lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = C’N = C’P = AQ = x ($0 \le x \le a$).

Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện cắt bởi (MNPQ).

**HD:** trải thiết diện lên mp(AA’.BB’)

**Bài 82:** Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có tất cả các cạnh bằng a. Chứng minh $AC \perp B'D'$, $AB' \perp CD'$, $AD' \perp CB'$ và tính thể tích.

**HD:** sử dụng 2 đường chéo của hình thoi

**Bài 83:** Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D cạnh a. Chứng minh $(A'BCD') \perp (AB'C'D)$ và tính thể tích khối tứ diện ACB’D’

**ĐS:** $V = \dfrac{a^3}{3}$

**Bài 84:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = a, BC = b, CC’ = c. Tính khoảng cách từ D tới mp(A’BC’) và thể tích hình chóp A.B’C’D’

**HD:** tam diện góc D vuông.

**Bài 85:** Chứng minh:

1) Một hình hộp có hai mặt chéo vuông góc với đáy là một hình hộp đứng.
2) Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau là một hình hộp chữ nhật.

**HD:** 1) giao tuyến của 2 mặt phẳng

**Bài 86:** Một lăng trụ đứng có chiều cao 20cm. Đáy lăng trụ là một tam giác vuông có cạnh huyền 13cm và diện tích là $30cm^2$ Tính diện tích xung quanh và thể tích của lăng trụ.

**ĐS:** $S_{xq} = 600$, $V = 600$

**Bài 87:** Hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A, AC = b, $\widehat{C} = 60^0$. Đường chéo BC’ của mặt bên tạo với mặt phẳng (AA’C’C) một góc $30^0$.Tính thể tích của lăng trụ

**ĐS:** $V = b^3\ \ \sqrt{6}$

**Bài 88:**Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a và điểm A’ cách đều các điểm A, B, C. Cạnh bên AA’ tạo với mặt phẳng đáy một góc $60^0$ Tính thể tích của lăng trụ và diện tích mặt bên BCC’B’

**ĐS:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}, S = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$

ABC

**Bài 89:** Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' cạnh đáy a, góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (BB'C'C) bằng $\varphi$. Tính V

**HD:** $AB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin\varphi}$

**Bài 90:** Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' đường cao h. Mặt phẳng (A'BD) hợp với mặt bên ABB'A' một góc $\alpha$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ.

**ĐS:** $V = h^3(\tan^2\alpha - 1)$.

**Bài 91:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có 3 kích thước AA' = a, AB = a, AD = 3a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của B'C' C'D' Tính diện tích thiết diện và tỉ số thể tích chia cắt bởi mp(AIJ).

**HD:** $S' = S.\cos\varphi$

**Bài 92:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD và M là trung điểm của BB' Tính thể tích tứ diện OBCD' và góc giữa OC' MD.

**HD:** dùng vectơ để tính góc.

**Bài 93:** Trên mp(P) cho đường tròn (C) đường kính AB = 2R. Một điểm C lưu động trên (C ), điểm S thuộc đường thẳng vuông góc với (P) tại A sao cho SA = R. Hạ SH, SK vuông góc lần lượt với SB, SC.

a) Tìm quỹ tích các điểm K.

b) Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHK.

**ĐS:** b) $\dfrac{R^3.\sqrt{5}}{75}$

**Bài 94:** Trên 3 cạnh Ox, Oy, Oz của góc tam diện vuông lần lượt lấy A, B, C thay đổi sao cho $OA^2 + OB^2 + OC^2 = k^2$ cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mp(ABC).

**HD:** dùng bất đẳng thức Côsi.

**Bài 95:** Cho tứ diện OABC, đặt BC = a, CA = b, AB = c và gọi $\alpha, \beta, \gamma$ là số đo các góc phẳng các nhị diện cạnh BC, CA, AB. Tính thể tích tứ diện OABC.

# Chương II: MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

## §1. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Tập hợp các điểm trong không gian, cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R. Kí hiệu là S(O; R).

$$S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$$

Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu S(O; R) cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu S(O; R) hoặc hình cầu S(O; R). Như vậy, khối cầu S(O; R) là tập hợp các điểm M sao cho $OM \le R$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu S(O; R) và mp(P). Gọi OH = d là khoảng cách từ O đến (P) thì:

a) Nếu $d < R$: mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến có tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Đặt biệt, khi $d = 0$ thì mp(P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có bán kính R, gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

b) Nếu $d = R$, mp(P) và mặt cầu S(O; R) có điểm chung duy nhất là H. Khi đó mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H hoặc mp(P) là tiếp diện của mặt cầu tại tiếp điểm H.

c) Nếu $d > R$: mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.

- Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và d = OH là khoảng cách từ O tới Δ.

a) Nếu $d < R$: đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm

b) Nếu $d = R$, đường thẳng Δ và mặt cầu S(O; R) có điểm chung duy nhất là H. Khi đó, đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H hoặc Δ là tiếp tuyến của mặt cầu tại tiếp điểm H.

c) Nếu $d > R$: đường thẳng không có điểm chung với mặt cầu.

Định lý: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O; R) thì qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Khi đó

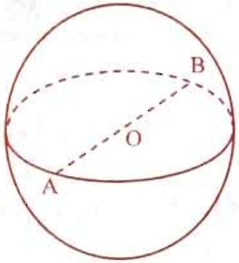
a) Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

b) Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

- Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu:

Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $S = 4\pi R^2$

Khối cầu bán kính R có thể tích là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: MẶT CẦU, KHỐI CẦU

Cho mặt cầu S(O; R) và một điểm A

- Nếu OA = R thì điểm A thuộc mặt cầu đoạn thẳng OA gọi là bán kính của mặt cầu.

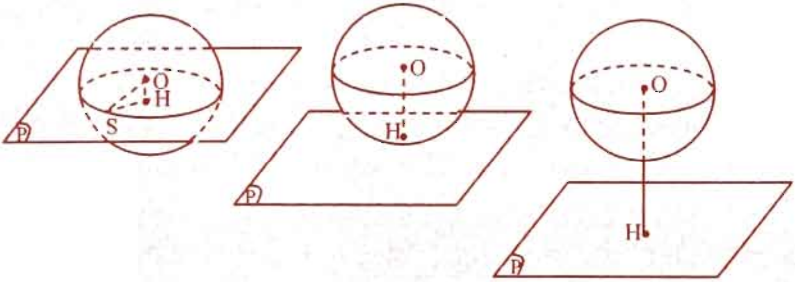
- Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB được gọi là đường kính của mặt cầu.

Một mặt cầu được xác định khi biết tâm và bán kính R hoặc biết một đường kính AB của nó.

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

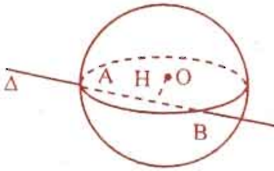
Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng:

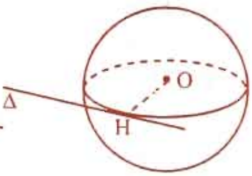


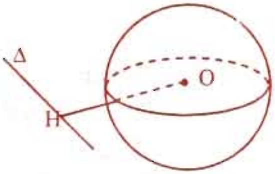
Cho mặt cầu S(O; R) và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O tới (P) và H là hình chiếu của O trên (P). Khi đó:

- Nếu $d < R$ thì mp(P) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm là H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$
- Nếu $d = R$ thì mp(P) tiếp xúc mặt cầu tại một điểm duy nhất H.
- Nếu $d > R$ thì mp(P) không cắt mặt cầu S(O; R)

- Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng:







Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ, gọi d là khoảng cách từ O tới Δ và H là hình chiếu của O trên Δ. Khi đó:

- Nếu $d < R$ thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt A, B và dây $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$
- Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc mặt cầu tại một điểm duy nhất.
- Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu.

- Tiếp tuyến xuất phát từ 1 điểm ngoài mặt cầu.

Qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

Chú ý:

- Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu S(O; R) tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H.
- Có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu S(O; R) tại điểm H, chúng nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

**Ví dụ 1**: Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua:

a) Hai điểm phân biệt A, B cho trước.

b) Ba điểm phân biệt A, B, C cho trước

c) Một đường tròn cho trước.

**Giải**

a) I là tâm của mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước khi và chỉ khi IA = IB. Vậy tập hợp tâm của các mặt cầu đó là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

b) I là tâm của mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước khi và chỉ khi IA = IB = IC.

- Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là rỗng.

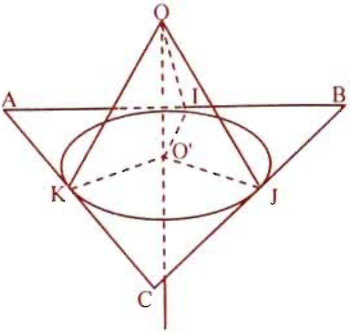
c) I là tâm của mặt cầu đi qua đường tròn (C) cho trước khi và chỉ khi I cách đều mọi điểm của đường tròn. Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn (C).

**Ví dụ 2:**

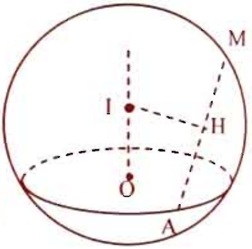
a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.

b) Có hay không một mặt cầu đi qua một đường tròn và một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đường tròn?

## Giải



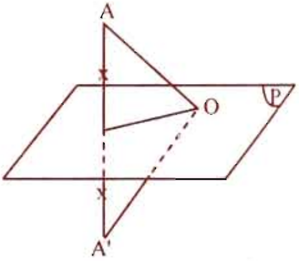
a) Mặt cầu tâm O tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt tại các điểm I, J, K khi và chỉ khi OI ⊥ AB, OJ ⊥ BC, OK ⊥ CA, OI = OJ = OK.
Gọi O' là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC) thì các điều kiện là: O'I ⊥ AB, O'J ⊥ BC, O'K ⊥ CA, O'I = O'J = O'K, hay O' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Suy ra tập hợp các điểm O là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



b) Gọi M là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đường tròn (C). Lấy điểm A nằm trên (C) và gọi I là giao điểm của trục đường tròn và mặt phẳng trung trực của MA. Mặt cầu tâm I, bán kính R = IA = IM là mặt cầu đi qua đường tròn (C) và đi qua điểm M.

**Ví dụ 3:** Cho mp(P) và điểm A không thuộc (P). Chứng minh rằng mọi mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên (P) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

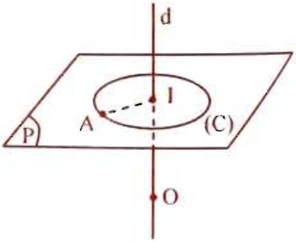
## Giải



Giả sử (S) là mặt cầu đi qua A và có tâm O nằm trên (P). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) thì OA' = OA nên mặt cầu (S) cũng đi qua A'. Vậy mặt cầu (S) luôn đi qua hai điểm cố định A và A'.

**Ví dụ 4**: Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Xét các mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên d. Chứng minh rằng các mặt cầu đó luôn đi qua một đường tròn cố định.

## Giải



Giả sử (S) là một mặt cầu đi qua A, có tâm O nằm trên d. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d. Khi đó (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) có tâm là giao điểm I của (P) và d, có bán kính r = IA.
Vậy đường tròn (C) cố định và mặt cầu (S) luôn luôn đi qua đường tròn cố định đó.

**Ví dụ 5**: Cho hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M sao cho $\overline{MA} \quad \overline{MB} = 0$ là mặt cầu đường kính AB.

### Giải

Ta có $\overline{MA}\quad\overline{MB} = (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IB})$

$$= (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} - \overline{IA}) = MI^2 - IA^2$$

Do đó $\overline{MA}\quad\overline{MB} = 0 \Leftrightarrow MI = IA$: không đổi.

Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm I bán kính R = IA, tức là mặt cầu đường kính AB.

**Ví dụ 6**: Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M tới hai điểm A, B cố định bằng $k^2$ cho trước.

### Giải

Gọi O là trung điểm của AB. Ta có:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}(2k^2 - AB^2)$$

Biện luận:

Nếu $2k^2 > AB^2$ thì tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm O, bán kính

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$$

Nếu $2k^2 = AB^2$ tập hợp các điểm M gồm chỉ một điểm O.

Nếu $2k^2 < AB^2$, tập hợp các điểm M là rỗng.

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$, k cho trước.

### Giải:

Gọi I, J là trung điểm cạnh AB, CD và G là trung điểm IJ.

Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} + 2MJ^2 + \frac{CD^2}{2} = k^2$$

$$\Leftrightarrow 2(MI^2 + MJ^2) = k^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(MG^2 + \frac{IJ^2}{2}\right) = k^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{4}\left(k^2 - IJ^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}\right) = m \text{ hằng số}$$

Nếu m < 0 thì tập điểm là $\varnothing$

Nếu m = 0 thì tập điểm là $\{G\}$

Nếu m > 0 thì tập điểm là mặt cầu tâm G có bán kính $R = \sqrt{m}$

Cách khác: Sử dụng hệ thức: $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \overline{O}$

**Ví dụ 8:** Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M tới 8 đỉnh của một hình hộp cho trước bằng $k^2$ cho trước.

### Giải

Giả sử ba kích thước của hình hộp là AB = a, BC = b, CC' = c thì

$AC'^2 + BD'^2 + CA'^2 + DB'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

ASC

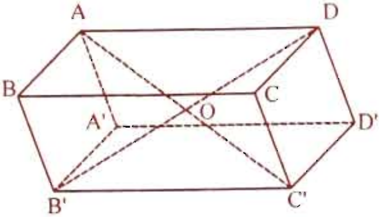
Gọi O là tâm của hình hộp, ta có:

$$MO^2 = \frac{MA^2 + MC'^2}{2} - \frac{AC'^2}{4}$$

$$MO^2 = \frac{MB^2 + MD'^2}{2} - \frac{BD'^2}{4}$$

$$MO^2 = \frac{MC^2 + MA'^2}{2} - \frac{CA'^2}{4}$$

$$MO^2 = \frac{MD^2 + MB'^2}{2} - \frac{DB'^2}{4}$$



Suy ra $4MO^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD'^2) - (a^2 + b^2 + c^2)$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD'^2 = k^2$

$\Leftrightarrow 4MO^2 = \frac{k^2}{2} - (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)}{8}$

Vậy: Nếu $k^2 > 2(a^2 + b^2 + c^2)$ thì tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm O bán kính $R = \sqrt{\frac{k^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)}{8}}$

Nếu $k^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ thì điểm M trùng với O.

Nếu $k^2 < 2(a^2 + b^2 + c^2)$ tập hợp các điểm M là rỗng

**Ví dụ 9:** Cho mặt cầu S(O; R) và điểm M. Qua điểm M, vẽ 2 cát tuyến cắt mặt cầu tại A, B và C, D. Chứng minh phương tích:

$\overline{MA}\;\overline{MB} = \overline{MC}\;\overline{MD} = MO^2 - R^2$

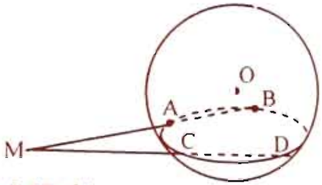
**Giải**

Hai cát tuyến MAB, MCD xác định mp(MBD), cắt theo mặt cầu theo một đường tròn đi qua A, B, C, D.

Do đó: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC}\;\overline{MD}$

Xét mặt phẳng (OAB) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn nên

$\overline{MA}\;\overline{MB} = MO^2 - R^2 \Rightarrow$ đpcm.



Kết quả: Nếu M ở ngoài mặt cầu, vẽ tiếp tuyến MT thì

$\overline{MA}\;\overline{MB} = \overline{MC}\;\overline{MD} = MO^2 - R^2 = MT^2$

**Ví dụ 10:** Cho điểm A ở ngoài mặt cầu S(O; R).

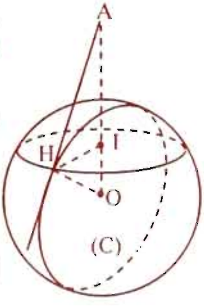
Một mặt phẳng bất kì đi qua AO, cắt mặt cầu S(O; R) theo một đường tròn (C). Gọi AH là một tiếp tuyến của đường tròn đó tại H.

a) Chứng minh rằng AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H.

b) Hạ HI vuông góc với OA tại I. Chứng minh rằng I là điểm cố định không phụ thuộc vào tiếp tuyến AH. Suy ra quỹ tích các tiếp điểm H.

ABC

**Giải**

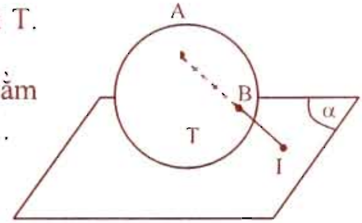


a) Vì AH là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại H nên khoảng cách từ O tới đường thẳng AH bằng R, vậy AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

b) Vì HI là đường cao của tam giác vuông OHA nên $OI.OA = OH^2$ hay $OI = \dfrac{R^2}{d}$ (không đổi). Suy ra I là điểm cố định và do đó H nằm trên mp(P) vuông góc với OA tại I. Ngoài ra, vì H còn nằm trên mặt cầu S(O; R) nên H nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mp(P).

**Ví dụ 11**: Cho A, B là hai điểm nằm về một phía của mp(α). Xét những mặt cầu đi qua A, B và tiếp xúc với (α). Tìm tập hợp các tiếp điểm.

**Giải**



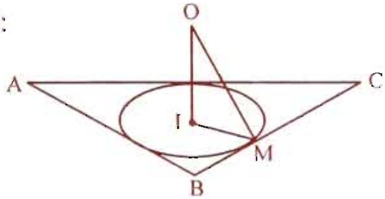
Nếu đường thẳng AB cắt mp(α) tại điểm I. Giả sử mặt cầu đi qua A, B và tiếp xúc mp(α) tại T. Ta có: $IT^2 = IA.IB$.

Vậy tập hợp các tiếp điểm là đường tròn nằm trong mp(α) có tâm I và bán kính $R = \sqrt{IA.IB}$.

Nếu đường thẳng AB // mp(α) và mặt cầu đi qua A, B tiếp xúc với mp(α) tại T. Khi đó TA = TB. Vậy tập hợp T là giao tuyến của mp(α) và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

**Ví dụ 12**: Ba cạnh của tam giác ABC có độ dài 13, 14 và 15. Một mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với ba cạnh của tam giác tại các tiếp điểm nằm trên ba cạnh đó. Tìm khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng của tam giác.

**Giải**



Tam giác ABC có 3 cạnh 13, 14, 15. Ta có:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

nên r = 4

Hạ OI ⊥ (ABC) thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Do đó $d(O; (ABC)) = OI = \sqrt{R^2 - r^2} = 3$.

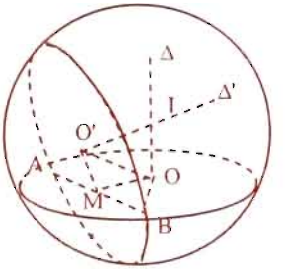
**Ví dụ 13**: Cho 2 đường tròn (O; r), (O', r') cắt nhau tại A, B và lần lượt nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt (P), (P').

1) Chứng minh mặt cầu (S) đi qua 2 đường tròn đó

2) Cho $r = 5$, $r' = \sqrt{10}$. $OO' = \sqrt{21}$, AB = 6. Tính bán kính của (S).

ABC

**Giải:**



1) Gọi M là trung điểm của AB thì OM ⊥ AB, O'M ⊥ AB. Do (P) và (P') phân biệt nên ba điểm O, M, O' không thẳng hàng.
Từ đó AB ⊥ mp(OMO').
Gọi Δ và Δ' lần lượt là trục của đường tròn C(O; r) và C'(O'; r') thì Δ và Δ' cùng vuông góc với AB.
Do đó Δ, Δ' cùng nằm trong mp(OMO') và cắt nhau tại I. Khi ấy, mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R = IB là mặt cầu phải tìm.

2) Ta có: OM = 4, O'M = 1. Xét tam giác OMO':

$$OO'^2 = OM^2 + O'M^2 - 2OM.O'M\cos\widehat{OMO'} \Rightarrow \cos\widehat{OMO'} = -\frac{1}{2}$$

Nên: $\widehat{OMO'} = 120^0$ và $\widehat{OIO'} = 60^0$

Tương tự: $\cos\widehat{MO'O} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, do đó $\sin\widehat{OO'I} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Xét tam giác OIO', ta có:

$$\frac{OI}{\sin\widehat{OO'I}} = \frac{OO'}{\sin\widehat{OIO'}} \Rightarrow \frac{OI}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow OI = 2\sqrt{3}$$

Nên $R^2 = IB^2 = OB^2 + OI^2 = 25 + 12 = 37$. Vậy $R = \sqrt{37}$.

**Ví dụ 14**: Cho một tứ diện đều ABCD có các cạnh bằng a. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, AD lần lượt tại B, C và D.

a) Tính bán kính R của mặt cầu (S).

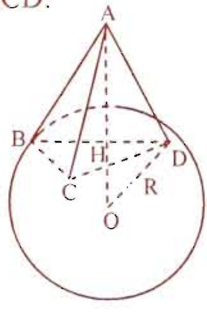
b) Một mặt cầu (S') có bán kính R' < R, tiếp xúc với mặt cầu (S) và cũng nhận các đường thẳng AD, AB, AC làm các tiếp tuyến. Tính thể tích khối cầu (S').

**Giải**

a) Gọi O là tâm của mặt cầu (S) thì OB = OC = OD = R và OBA, OCA, ODA là những tam giác vuông tại các đỉnh B, C, D. Gọi H là giao điểm của AO và mp(BCD) thì H là tâm của tam giác đều BCD.

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $R = OD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$



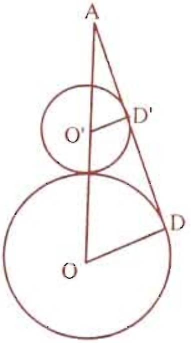
b) Gọi O' là tâm mặt cầu (S') và D' là điểm tiếp xúc của (S') với AD, cắt cả hai mặt cầu bởi mặt phẳng (ADO) ta được hình gồm hai đường tròn tâm O, tâm O' tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với AD tại D và D'.

Ta có $\frac{O'D'}{OD} = \frac{AO'}{AO} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{AO - R - R'}{AO}$

Mà $AO = \sqrt{R^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Do đó $R' = \frac{a\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{3})$

Vậy: $V' = \frac{4}{3}\pi R'^3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{3})^3$



**Ví dụ 15**: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với hai cạnh SB và SC tại trung điểm của mỗi cạnh đó.

a) Chứng minh mặt cầu đi qua trung điểm của AB và AC.

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D. Tính AD và SD.

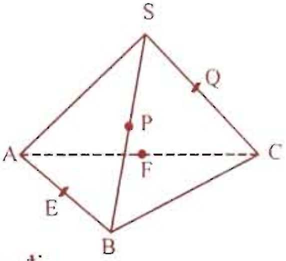
**Giải**

Giả sử P, Q lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Mặt cầu đi qua A tiếp xúc với SB tại P và SC tại Q sẽ cắt đường thẳng AB tại điểm F

Do đó $BP^2 = BE.BA$ hay $\frac{a^2}{2} = BE.a \Rightarrow BE = \frac{a}{2}$.

Vậy E là trung điểm AB. Tương tự mặt cầu cũng đi qua trung điểm F của AC.



b) Tương tự ta có $SD.SA = SP^2 \Rightarrow SD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ và do đó $AD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

**Ví dụ 16**: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, AB = a. Biết SA = 2a và SA ⊥ (ABC), gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB và SC. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, B, C, S cùng nằm trên một mặt cầu.

b) Năm điểm A, B, C, H, K cùng nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích của mặt cầu đó.

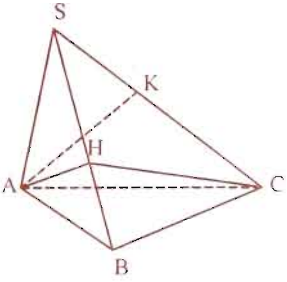
**Giải**

a) Ta có SA ⊥ (ABC) ⇒ SA ⊥ BC, SA ⊥ AC.

Mà BC ⊥ AB

Suy ra BC ⊥ (SBA) ⇒ BC ⊥ SB.

Vậy các điểm A, B, C, S cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC.



b) Ta có BC ⊥ (SAB) nên AH ⊥ BC.

Mà AH ⊥ SB ⇒ AH ⊥ (SBC). Do đó AH ⊥ HC.

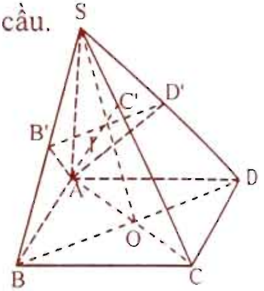
Ta lại có $AK \perp KC$, $BA \perp BC$ nên B, H và K cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên các điểm A, B, C, H, K cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC, bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 2\pi a^2$

**Ví dụ 17**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD. Chứng minh:

a) Các điểm A, B', C', D' đồng phẳng

b) Bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu.



**Giải**

a) Ta có $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp AB'$.
Mà $AB' \perp SB$ nên $AB' \perp (SBC)$, suy ra $AB' \perp SC$.
Tương tự $AD' \perp SC$. Do đó $SC \perp (AB'D')$
Gọi I là giao điểm của SO với B'D', gọi C'' là giao của AI với SC thì AC'' thuộc (AB'D') nên $AC'' \perp SC$. Vậy $C' \equiv C''$
Từ đó A, B', C', D' cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC, tức là các điểm A, B', C', D' đồng phẳng.

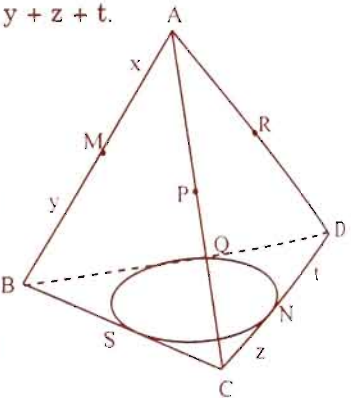
b) Theo giả thiết ta có $AB \perp BC$, $AD \perp DC$.
Theo chứng minh trên ta có $AB' \perp B'C$, $AD' \perp D'C$, $AC' \perp C'C$.
Từ đó các điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông, do đó chúng cùng thuộc mặt cầu đường kính AC.

**Ví dụ 18**: Chứng minh rằng có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của hình tứ diện ABCD khi và chỉ khi: $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

**Giải**

Giả sử có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện ABCD tại các điểm M, N, P, Q, R, S như hình vẽ thì $AM = AP = AR = x$, $BM = BS = BQ = y$, $CN = CP = CS = z$, $DN = DQ = DR = t$.

Do đó, $AB + CD = AC + BD = AD + BC = x + y + z + t$.



Đảo lại, ta xác định các tiếp điểm từ hệ

$x + y = AB$ ; $y + z = BC$; $z + t = CD$

$t + x = DA$; $x + z = AC$; $y + t = BD$.

Giải ra, ta được:

$$x = \frac{1}{3}[AB + AC + AD - \frac{1}{2}(BC + CD + DB)]$$

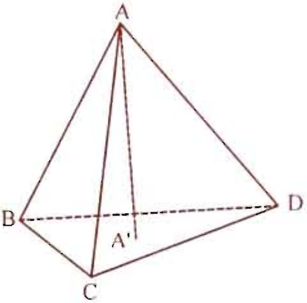
$$y = \frac{1}{3}[BA + BC + AD - \frac{1}{2}(AC + CD + DA)]$$

$$z = \frac{1}{3}[CA + CB + CD - \frac{1}{2}(AB + BD + DA)]$$

$$t = \frac{1}{3}[DA + DB + DC - \frac{1}{2}(AB + BC + CA)]$$

Nhận xét rằng trục của các đường tròn nội tiếp các mặt đáy (M, N, P, Q, R, S cũng là các tiếp điểm) đồng qui tại điểm J. Mặt cầu tâm J đi qua các điểm M, N, P, Q, R, S là mặt cầu cần tìm.

**Ví dụ 19**: Cho tứ diện ABCD có hình chiếu mỗi đỉnh lên mặt đối diện là trực tâm của mặt đó. Chứng minh 6 trung điểm của 6 cạnh tứ diện thuộc một mặt cầu.



**Giải**

Hạ AA' ⊥ (BCD) thì A' là trực tâm tam giác BCD nên BA' ⊥ CD.

Ta có AA' ⊥ CD, do đó:

CD ⊥ (ABA') ⇒ AB ⊥ CD.

Tương tự AC ⊥ BD, AD ⊥ CB.

Vậy tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc.

Vẽ qua mỗi cạnh tứ diện, một mặt phẳng song song với cạnh đối thì được một hình hộp, vì các cạnh đối tứ diện vuông góc nên hình hộp có các cạnh bằng nhau. Suy ra khoảng cách từ tâm O của hình hộp đó đến các trung điểm của tứ diện đều bằng nhau ⇒ đpcm.

**Ví dụ 20**: Cho 4 hình cầu có cùng bán kính r và chúng được sắp xếp sao cho đôi một tiếp xúc với nhau. Ta dựng 4 mặt phẳng sao cho mỗi mặt phẳng đều tiếp xúc với ba hình cầu và không cắt hình cầu còn lại. Bốn mặt phẳng đó tạo nên một tứ diện đều. Hãy tính thể tích của khối tứ diện đó theo r.

**Giải**

Gọi $M_1$, $M_2$, $M_3$ và $M_4$ là tâm của 4 hình cầu đã cho thì đó là 4 đỉnh của một tứ diện đều có cạnh bằng 2r và do đó có chiều cao $h_1 = \frac{2}{3}r\sqrt{6}$ và thể tích là $V_1 = \frac{2}{3}r^3\sqrt{2}$

Gọi O là tâm của tứ diện đều $M_1M_2M_3M_4$. Ta có tứ diện đã cho đồng dạng với tứ diện $M_1M_2M_3M_4$ hơn nữa O chính là tâm đồng dạng. Ta gọi các đỉnh của tứ diện đã cho là $A_1$, $A_2$, $A_3$ và $A_4$ sao cho trong phép đồng dạng tỉ số k biến $M_i$ thành $A_i$ (i = 1, 2, 3, 4).

Ta có hai mặt phẳng $(M_2M_3M_4)$ và $(A_2A_3A_4)$ song song với nhau và có khoảng cách đúng bằng bán kính r. Gọi G là tâm của mặt $(M_1M_2M_3)$ và G' là tâm của mặt $(A_1A_2A_3)$ thì:

$$OG = \frac{1}{4}h_1 = \frac{r\sqrt{6}}{6} \quad ; OG' = OG + r = r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Nên $k = \frac{OG'}{OG} = 1 + \sqrt{6}$

Vậy thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là: $V = V_1.k^3 = \dfrac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1+\sqrt{6})^3$

**Ví dụ 21**: Cho P là một điểm cố định nằm bên trong một mặt cầu cho trước. Ba dây PA, PB, PC vuông góc nhau từng đôi một. Gọi Q là đầu mút thứ hai của đường chéo PQ của hình hộp chữ nhật mà các cạnh là PA, PB, PC. Tìm quỹ tích các điểm Q khi ba điểm A, B, C chạy trên mặt cầu.

**Giải**

Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}$

Do đó $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PG}$ nên quỹ tích của Q là ảnh của quỹ tích của G qua phép vị tự tâm P tỉ số bằng 3.

Ta có: $9PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}$

nên $9PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$

Mặt khác: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{PG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Tương tự: $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Do đó: $6PG^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 \Leftrightarrow 3R^2 = 3OG^2 + 6PG^2$

Từ đó $R^2 = OG^2 + 2PG^2 \Rightarrow OG \le R$

Chọn điểm I cố định: $\overrightarrow{PI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PO}$ thì $2\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IO} = \vec{0}$ Khi đó:

$$OG^2 + 2PG^2 = \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IG}\right)^2$$

$= OI^2 + IG^2 + 2PI^2 + 2IG^2 + 2\overrightarrow{IG}(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{PI})$

$= OI^2 + 2PI^2 + 3IG^2$

Vậy $IG^2 = \dfrac{R^2 - OI^2 - 2PI^2}{3} > 0$

Do đó điểm G chạy trên mặt cầu tâm I bán kính $r = \sqrt{\dfrac{R^2 - OI^2 - 2PI^2}{3}}$

Suy ra quỹ tích của Q.

**Ví dụ 22**: Cạnh đáy và đường cao của hình lăng trụ lục giác đều ABCDEF. A'B'C'D'E'F' lần lượt bằng a và h.Chứng minh rằng sáu mặt phẳng (AB'F'), (CD'B'), (EF'D'), (D'EC), (F'AE), (B'CA) cùng tiếp xúc với một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính của hình cầu nói trên.

**Giải**

Gọi O là tâm hình lăng trụ. Mặt phẳng (AB'F') tiếp xúc với mặt cầu tâm O và mặt cầu (S) này được xác định duy nhất. Sáu mặt phẳng đều cách đều O suy ra rằng cả sáu mặt phẳng đều tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O.

Gọi P là trung điểm cạnh AE, P' là trung điểm cạnh A'E'; Q là trung điểm cạnh PF', và gọi R là hình chiếu của O lên đường thẳng PF', thì các điểm P, P', Q, R, O, F' cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ta có $F'P' = \frac{a}{2}$ và $QO = \frac{3a}{4}$ Vì QO // F'P' nên $\widehat{RQO} = \widehat{PP'F'}$. Ngoài ra $\widehat{ORQ} = \widehat{PP'F'} = 90^\circ$ nên suy ra hai tam giác ORQ và PP'F' đồng dạng nhau. Do đó, bán kính của (S) là:

$$OR = PP'.\frac{OQ}{PF'} = h.\frac{\frac{3a}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}} = \frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 4h^2}}$$

## DẠNG 2: MẶT CẦU NỘI, NGOẠI TIẾP

- Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

- Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp đó có đường tròn ngoại tiếp.

- Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là lăng trụ đứng và đáy của hình lăng trụ đó có đường tròn ngoại tiếp.

- Xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp

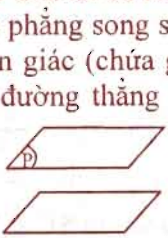
Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn (C), gọi Δ là trục của đường tròn đó và gọi O là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, chẳng hạn cạnh $SA_1$ thì $OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

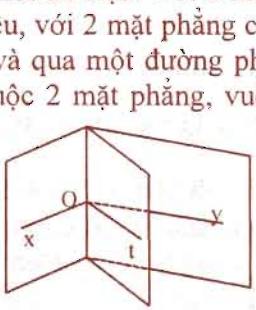
Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn. Gọi I, I' là hai tâm của đường tròn ngoại tiếp 2 đáy thì II' là trục của 2 đường tròn. Gọi O là trung điểm của II' thì O cách đều các đỉnh nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

- Mặt cầu tiếp xúc với mọi mặt của hình đa diện gọi là mặt cầu nội tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là ngoại tiếp mặt cầu đó.

- Xác định tâm I của mặt cầu nội tiếp:

Tìm điểm I các đều tất cả các mặt của khối đa diện. Với 2 mặt song song thì I thuộc mặt phẳng song song cách đều, với 2 mặt phẳng cắt nhau thì I thuộc mặt phân giác (chứa giao tuyến và qua một đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng lần lượt thuộc 2 mặt phẳng, vuông góc với giao tuyến).





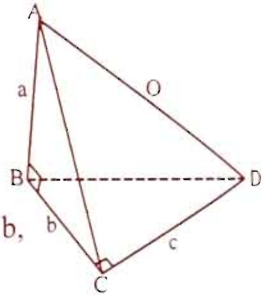
Chú ý:

- Với tứ diện thì có 4 cách chọn đáy tam giác. Nếu có mặt là tam giác vuông, cân, đều thì chọn ưu tiên mặt đó.
- Với hình chóp đều, lăng trụ đều thì sử dụng trục của hình khối.
- Nếu khối đa diện có mặt cầu nội tiếp thì bán kính $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$
- Nếu khối đa diện có một mặt không nội tiếp được đường tròn thì không có mặt cầu ngoại tiếp (mặt phẳng chứa mặt đó cắt mặt cầu theo đường tròn ngoại tiếp đa giác).

**Ví dụ 1**: Trong không gian cho ba đoạn thẳng AB, BC, CD sao cho $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AB$. Chứng minh rằng có mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó nếu $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

**Giải**

Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp BD$, tương tự ta có $DC \perp AC$.



Vậy các điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu đường kính AD, tâm là trung điểm của AD.

Ta có $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2$

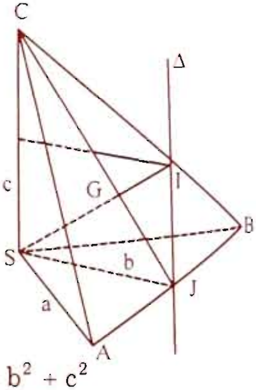
nên bán kính mặt cầu đó là $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

**Ví dụ 2**: Cho hình chóp S.ABC biết rằng $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp

b) Chứng minh rằng điểm S, trọng tâm tam giác ABC và tâm mặt cầu ngoại tiếp đó thẳng hàng.

**Giải**



a) Gọi J là trung điểm của AB. Vì tam giác SAB vuông ở S nên trục Δ là đường thẳng vuông góc với mp(SAB) tại J. Gọi I là giao điểm của Δ và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SC thì I cách đều bốn điểm S, A, B, C.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC có tâm I và có bán kính $R = IA$.

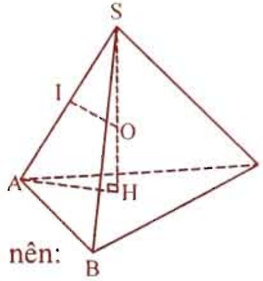
Ta có: $R^2 = IA^2 = IJ^2 + AJ^2 = \left(\dfrac{SC}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$

b) Vì $SC \mathbin{/\!/} IJ$ nên SI cắt CJ tại một điểm G và do $SC = 2IJ$ nên $CG = 2GJ$. Vì CJ là trung tuyến của tam giác ABC nên G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 3**: Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Suy ra kết quả cho tứ diện đều cạnh a.

**Giải**



Giả sử SH là đường cao của hình chóp đều S.ABC thì SH là trục của tam giác ABC. Trong mặt phẳng (SAH), đường trung trực của SA cắt SH tại O thì O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính của mặt cầu là R = SO.

Gọi I là trung điểm của SA thì tứ giác AHOI nội tiếp nên:

$$SO.SH = SI.SA \Rightarrow SO = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SA^2}{2h}$$

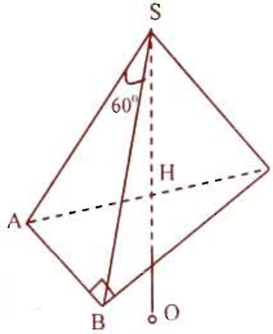
Ta có $SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + 3h^2}{3}$

Suy ra $R = SO = \frac{a^2 + 3h^2}{6h} \Rightarrow V = \frac{\pi(a^2 + 3h^2)^3}{162h^3}$

Với tứ diện đều cạnh a thì $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ suy ra thể tích tương ứng.

**Ví dụ 4**: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 60^0$ $\widehat{BSC} = 90^0$ và $\widehat{CSA} = 120^0$ Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

**Giải:**

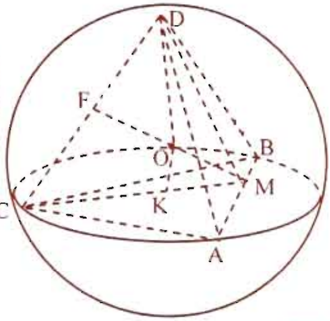


Ta có AB = a, $BC = a\sqrt{2}$ và $AC = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông ở B. Gọi SH là đường cao của hình chóp, do SA = SB = SC nên HA = HB = HC suy ra H là trung điểm của cạnh AC.

Tâm mặt cầu thuộc trục SH. Vì góc $\widehat{HSA} = 60^0$ nên gọi O là điểm đối xứng với S qua điểm H thì: OS = OA = OC = OB = a. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có tâm O và có bán kính R = a.

**Ví dụ 5:** Tứ diện ABCD có AB = 6, CD = 8, các cạnh còn lại đều bằng $\sqrt{74}$ Tính diện tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện.

**Giải**



Gọi M, F thứ tự là trung điểm của AB, CD và K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó K thuộc CM. Hạ KO ⊥ FM thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, R = OD.

Ta có $CM = DM = \sqrt{74 - 9} = \sqrt{65}$

Và $MF = \sqrt{65 - 16} = 7$

ABC

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$

Ta có $R = \dfrac{abc}{4S} \Rightarrow CK = R = \dfrac{37}{\sqrt{65}}$.

Các tam giác đồng dạng OKM và CFM suy ra $\dfrac{OM}{MK} = \dfrac{CM}{MF}$

$\Rightarrow OM = \dfrac{MK.CM}{MF} = \dfrac{(CM - R)CM}{MF} = \dfrac{28}{7} = 4$

Do đó OF = 3. Suy ra $R = OD = \sqrt{OF^2 + FD^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 100\pi$.

**Ví dụ 6**: Cho tam giác cân ABC có góc $\widehat{BAC} = 120^0$ và đường cao $AH = a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy hai điểm I và J ở về hai phía của điểm A sao cho IBC là tam giác đều và JBC là tam giác vuông cân.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC và chứng minh rằng BIJ, CIJ là tam giác vuông

b) Xác định tâm và tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC.

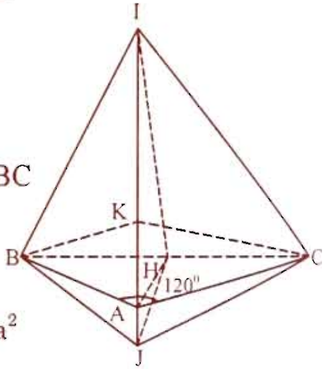
### Giải

a) Tam giác ABC cân nên H là trung điểm của BC.

Trong tam giác ABH và AHC:

$BH = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a\sqrt{6}$.

Và $AC = \dfrac{AH}{\cos 60^0} = 2a\sqrt{2}$



Tam giác IBC đều, từ $AH \perp BC$ suy ra $IH \perp BC$

và $IH = \dfrac{BC.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}a$.

Trong tam giác vuông IAH có:

$IA^2 = IH^2 - AH^2 = (3\sqrt{2}a)^2 - (a\sqrt{2})^2 = 16a^2$

$\Rightarrow IA = 4a$

Trong tam giác vuông JAH có $JH = BH = a\sqrt{6}$

Trong tam giác vuông JAH có:

$JA^2 = JH^2 - AH^2 = 4a^2 \Rightarrow JA = 2a$.

Do đó: $BI^2 + BJ^2 = (2a\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3}a)^2 = 36a^2 = JI^2$ nên tam giác BJI vuông tại B.

Do $\Delta CJI = \Delta BJI$ (c.c.c) nên tam giác CJI cũng là tam giác vuông tại C.

b) Gọi K là trung điểm của JI ⇒ K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BJI. Chứng minh tương tự thì K cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CJI.

Do đó KI = KJ = KB = KC ⇒ K là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện CIBJ, bán kính $R = KI = \dfrac{JI}{2} = 3a$.

**Ví dụ 7**: Cho tứ diện SABC có SA ⊥ mp(ABC), (SBC) ⊥ (SAB). Cho biết $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^o$

a) Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

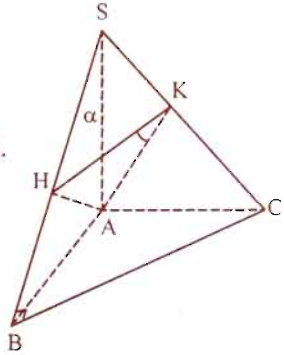
b) Tính tan của góc $\alpha = \widehat{ASB}$ để hai mặt phẳng (SCA), (SCB) hợp nhau góc $60^o$

**Giải**

a) SA ⊥ mp(ABC) ⇒ SA ⊥ BC. Hạ AH ⊥ SB thì AH ⊥ mp(SBC) do đó BC ⊥ mp(SAH) suy ra BC ⊥ SB.

Các điểm A và B đều nhìn đoạn SC dưới một góc vuông nên có mặt cầu đường kính SC ngoại tiếp tứ diện SABC, bán kính:

$$R = \frac{SC}{2} = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} = a.$$



b) Hạ AK ⊥ SC. Vì AH ⊥ (SBC) nên AH ⊥ SC.

Vậy SC ⊥ mp(AKH) nên $\widehat{AKH}$ = g((SCA), (SCB)).

Ta có góc $\widehat{AKH} = 60^o$ nên $AK = HK\sqrt{3}$

Mà AH = SAsinα; $HK = \frac{SH\sqrt{2}}{2} = \frac{SA\cos\alpha\sqrt{2}}{2}$

Vậy: $\sin\alpha = \frac{\cos\alpha.\sqrt{2}}{2}.\sqrt{6} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

**Ví dụ 8:** Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền AB = 2a. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy một điểm S khác A.

a) Chứng minh tứ diện SABC chỉ có một cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

b) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC. Tính thể tích mặt cầu khi (SBC) tại với (ABC) một góc bằng $60^o$

**Giải**

a) SA ⊥ mp(ABC) ⇒ SA ⊥ BC. Giả sử AC ⊥ SB thì AC ⊥ mp(SAC) (vì AC ⊥ SA). Từ đó ta suy ra AC ⊥ AB là vô lí vì theo giả thiết ta có $\widehat{CAB} = 45^o$.

Vậy AC không vuông góc với SB.

Tương tự AB không vuông góc với SC.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp O của tứ diện SABC phải nằm trên đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I. Ta suy ra d' // d do đó d' cắt SB tại trung điểm O của SB.

Vì SA ⊥ (ABC), AC ⊥ CB nên SC ⊥ CB.

Do đó $\widehat{SCA} = 30^o$, $AC = a\sqrt{2}$, suy ra:

ABC

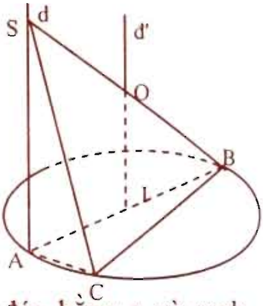
$SA = AC\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

$R = \dfrac{SB}{2} = OA = OB = OC = OS.$

$SB^2 = SA^2 + AB^2 = \dfrac{6a^2}{9} + 4a^2 = \dfrac{42a^2}{9} \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{42}}{3}$

Vậy $R = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{42}}{6} \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{7}{27}\pi a^3\sqrt{42}$.



**Ví dụ 9:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính thể tích của hình chóp đã cho.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

**Giải**

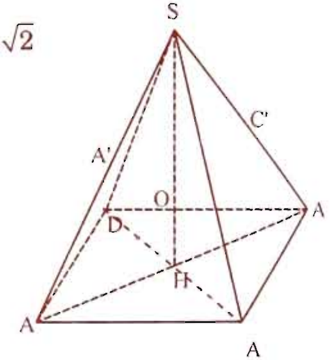
a) Tam giác SAC là tam giác đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên có đường cao $SH = a\sqrt{2}\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Ta có SH là đường cao của hình chóp nên

$$V = \frac{1}{3}a^2\ \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$

b) Gọi O là trọng tâm của tam giác đều SAC thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Bán kính mặt cầu là:

$$R = OS = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{8}{3}\pi a^2$$



**Ví dụ 10**: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh bằng a, SAB là tam giác đều nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

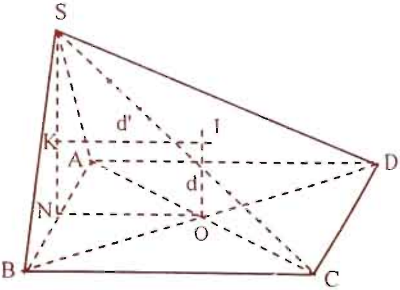
**Giải:**

Tâm mặt cầu ngoại tiếp là giao điểm I của hai trục hình vuông ABCD và tam giác đều SAB. Trục của hình vuông ABCD là đường thẳng d vuông góc với (ABCD) tại tâm O, trục của tam giác đều SAB là đường thẳng vuông góc với (SAB) tại tâm K.

Gọi N là trung điểm AB, vì (SAB) ⊥ (ABCD) nên IONK là hình chữ nhật, do đó :

$$R = IB = \sqrt{IO^2 + OB^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$



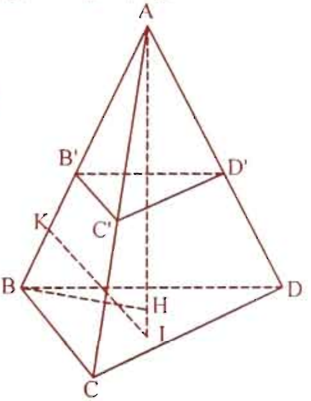
ABC

**Ví dụ 11**: Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh a, gọi B', C', D' là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Chứng minh rằng hình chóp cụt B'C'D'.BCD có mặt cầu ngoại tiếp. Tính bán kính mặt cầu đó.

**Giải**

Gọi AH là đường cao của hình tứ diện đều ABCD thì AH là trục của cả hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và tam giác B'C'D', gọi I là giao điểm của đường thẳng AH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BB' thì IB = IC = ID = IB' = IC' = ID'

hay sáu điểm B, C, D, B', C', D' nằm trên mặt cầu tâm I, bán kính IB. Gọi K là trung điểm của BB' thì từ hai tam giác vuông đồng dạng AIK và ABH, ta có:



$$\frac{IK}{BH} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow IK = \frac{BH.AK}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}a}{8}$$

Do đó $IB^2 = IK^2 + KB^2 = \frac{9a^2}{32} + \frac{a^2}{16} = \frac{11a^2}{32}$

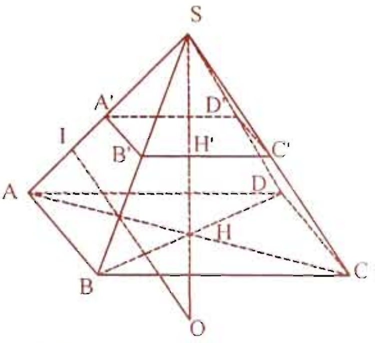
Vậy bán kính mặt cầu là $R = IB = \frac{a\sqrt{11}}{4\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{22}}{8}$

**Ví dụ 12:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SD. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng thuộc một mặt cầu và tính bán kính mặt cầu đó.

**Giải**

Gọi SH là đường cao của hình chóp đều thì H là tâm của hình vuông ABCD và SH đi qua tâm H' của hình vuông A'B'C'D'.

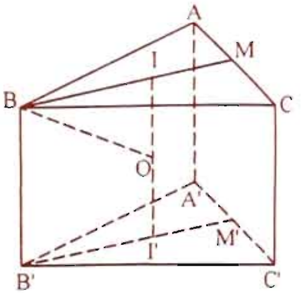
Mọi điểm nằm trên SH đều cách đều bốn điểm A, B, C, D và cũng cách đều bốn điểm A', B', C', D'. Mặt cầu tâm O là giao điểm của trục SH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA', bán kính :



$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

**Ví dụ 13**: Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp một hình lăng trụ tam giác đều có 9 cạnh bằng a.

### Giải



Gọi I, I' là 2 tâm của 2 đường tròn đáy thì tâm mặt cầu ngoại tiếp ABC.A'B'C' là trung điểm O của II', R = OB. Ta có:

$$OB^2 = BI^2 + IO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2$$

Vậy bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

**Ví dụ 14:** Cho khối đa diện có mặt cầu nội tiếp S(I, r). Tính bán kính r theo thể tích V và diện tích toàn phần $S_{tp}$.

### Giải

Gọi $S_1, S_2, ..., S_n$ là diện tích các mặt của khối đa diện. Phân chia khối đa diện thành n hình chóp có đỉnh I và đáy là các mặt của khối đa diện.

Ta có: $V = V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{1}{3}S_1.r + \frac{1}{3}S_2.r + ... + \frac{1}{3}S_n.r$

Nên $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + ... + S_n)r = \frac{1}{3}S_{tp}.r \Rightarrow r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$

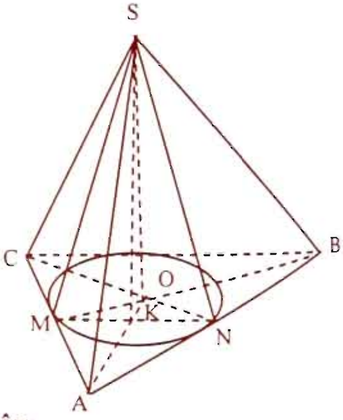
**Ví dụ 15**: Cho hình chóp tam giác đều SABC có đường cao SO = 1 và cạnh đáy bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N là trung điểm của cạnh AC, AB tương ứng. Tính thể tích hình chóp SAMN và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp đó.

### Giải:

Do ABC là tam giác đều nên: $AM = MN = NA = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{6}$

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Do đó: $V_{SAMN} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Vì SABC là hình chóp đều nên O trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do đó OM ⊥ AC, ON ⊥ AB và do SO ⊥ (ABC) nên ta suy ra SM ⊥ AC, SN ⊥ AB và SM = SN.

Xét tam giác vuông AOM; SOM:

$$OM = AM\tan 30^0 = \sqrt{6}\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} = ON$$

$SM^2 = OM^2 + SO^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow SM = \sqrt{3}$, nên:

$S_{SAM} = \frac{1}{2}AM.SM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{SAN} = \frac{1}{2}AN.SN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Gọi K là trung điểm của MN thì $SK \perp MN$.

$$SK^2 = SM^2 - KM^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow SK = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ nên:}$$

$$S_{SMN} = \frac{1}{2}MN.SK = \frac{3}{2};$$

Do đó bán kính hình cầu nội tiếp: $r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$.

**Ví dụ 16:** Góc tam diện Sxyz đỉnh có $\widehat{xSy} = 120^o$ $\widehat{ySz} = 60^o$ $\widehat{zSx} = 90^o$

Trên các tia Sx, Sy, Sz lấy tương ứng các điểm A, B, C sao cho $SA = SB = SC = a$.

a) Xác định hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC).

b) Tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện SABC.

**Giải**

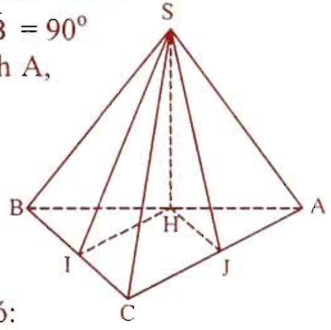
a) Do $\widehat{BSC} = 60^o$, nên SBC là tam giác đều, từ đó $BC = a$.

Do ASC là tam giác vuông cân nên $AC = a\sqrt{2}$.

Từ tam giác cân ASB có góc đỉnh là $120^o$ nên $AB = a\sqrt{3}$.

Vì $AC^2 + CB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AB^2$ nên $\widehat{ACB} = 90^o$

Vì $SA = SB = SC = a$ nên H cách đều ba đỉnh A, B, C. Do đó H là trung điểm của cạnh AB.



b) Ta có $S_{tp} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{a^2}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$$

và $V = \dfrac{1}{2}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ Do đó:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$$

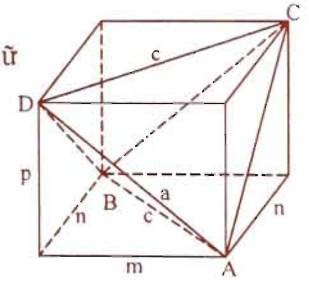
**Ví dụ 17**: Cho tứ diện ABCD với $AB = CD = c$, $AC = BD = b$, $AD = BC = a$.

a) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện R.

b) Chứng minh rằng có mặt cầu nội tiếp hình tứ diện. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp r.

**Giải**

Xem tứ diện ABCD là một phần của hình chữ nhật với 3 kích thước m, n, p thì ta có hệ:



$$\begin{cases} m^2 + n^2 = c^2 \\ m^2 + p^2 = a^2 \\ n^2 + p^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \\ n^2 = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\ p^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \end{cases}$$

ABC

Vì $m^2 + n^2 + p^2 = (2R)^2$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$$

Vậy $R = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$

Ta có $V = \frac{1}{3}mp = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$

$$S_{tp} = 4S_{ABC} = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$$

Vậy $r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a-b+c)}}$

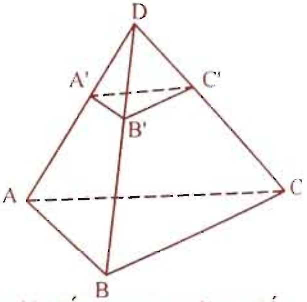
Cách khác: Tứ diện ABCD gần đều nên trọng tâm O là trung điểm của đoạn nối trung điểm 2 cạnh đối diện cách đều 4 đỉnh, các đều 4 mặt.

**Ví dụ 18:** Cho tứ diện ABCD có mặt cầu nội tiếp (I, r). Các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu đó và song song với các mặt tứ diện, chia tứ diện ABCD thành 4 tứ diện có 4 mặt cầu nội tiếp bán kính $r_1, r_2, r_3, r_4$.

Chứng minh $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2r$.

### Giải

Ta dùng tỉ diện tích, tỉ thể tích của các hình đồng dạng tương ứng thì được:



$$\frac{r_1}{r} = \frac{h'_1}{h_1} = \frac{h_1 - 2r}{h_1} = 1 - \frac{2r}{h_1}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} + \frac{r_4}{r} = 4 - 2r\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right)$$

$$= 4 - 2r\ \frac{1}{r} = 2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Ví dụ 19**: Cho tứ diện ABCD có tính chất: Mặt cầu nội tiếp của tứ diện tiếp xúc với mặt (ABC) tại tâm đường tròn nội tiếp I tam giác ABC, tiếp xúc với mặt (BCD) tại trực tâm H của tam giác BCD và tiếp xúc với mặt (ACD) tại trọng tâm G của tam giác ACD. Chứng minh ABCD là tứ diện đều.

### Giải

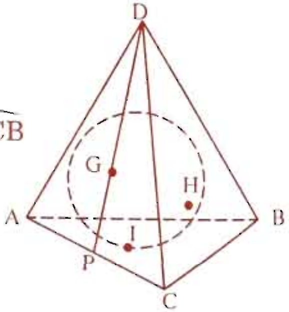
Vì I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC nên

$\alpha = \widehat{IAB} = \widehat{IAC}$; $\beta = \widehat{IBC} = \widehat{IBA}$, $\gamma = \widehat{ICA} = \widehat{ICB}$

Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$\Delta IAC = \Delta GAC$; $\Delta IBC = \Delta HBC$

suy ra $\alpha = \widehat{GAC}$, $\beta = \widehat{HBC}$, $\gamma = \widehat{GCA} = \widehat{HCB}$.



Trong tam giác ABC ta có:

$\alpha + \beta + \gamma = 90^o$, suy ra trong $\Delta BCD$ ta có:

$\alpha = \widehat{HBD} = \widehat{HCD}$ $\beta = \widehat{HDC}$ $\gamma = \widehat{HDB}$

Mặt khác $\Delta HCD = \Delta GCD$ suy ra $\alpha = \widehat{GCD}$, $\beta = \widehat{GDC}$ Gọi P là trung điểm của AC ta có $\widehat{PGC} = \alpha + \beta$ suy ra $\widehat{GPC} = 180^o - (\alpha + \beta + \gamma) = 90^o$ Do đó DP là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\Delta DAC$ cân đỉnh D suy ra $\Delta GAC$ cân đỉnh G. Từ đó $\alpha = \gamma$ nghĩa là $\widehat{HCD} = \widehat{HCB}$ nên CH là phân giác của góc DCB. Từ đó $\Delta DCB$ cân ở C, vậy CB = CD. Mặt khác $\Delta ABC$ cân ở B nên BA = BC.

Vậy DA = DC = BC = BA. Mặt khác do $\alpha = \gamma$ nên $\widehat{GCA} = \widehat{GCD}$, vậy $\Delta CAD$ cân ở C, ngoài ra $\Delta CAD$ còn cân ở D nên là tam giác đều suy ra $\beta = 30^o$ Chứng minh tương tự $\alpha = \gamma = 30^o$ nên $\Delta ABC$ và $\Delta BCD$ đều suy ra 6 cạnh của tứ diện bằng nhau. Vậy ABCD là tứ diện đều.

**Ví dụ 20**: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) cắt mặt phẳng (P) lần lượt theo các giao tuyến d, b, c. Biết d, b, c tạo với nhau thành 6 góc bằng nhau. Chứng minh rằng: AB CD = AC BD = AD BC.

### Giải

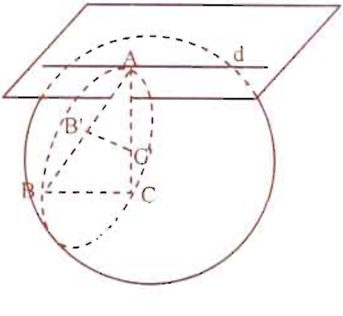
Trên AB, AC, AD ta lấy lần lượt các điểm B', C', D' thoả mãn:

AB' = AC.AD, AC' = AB.AD, AD' = AB.AC.

Ta có $\dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{AC'}{AB} = AD$

nên 2 tam giác ABC và AC'B' đồng dạng.

Vì d là tiếp tuyến của đường tròn (ABC).



Suy ra $\widehat{dAC} = \widehat{ABC}$ (chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

Do đó $\widehat{dAC} = \widehat{AC'B'} \Rightarrow d \,//\, B'C'$.

Tương tự b // C'D', c//B'D'

Vì b, c, d tạo thành các góc bằng nhau, suy ra tam giác B'C'D' đều.

Ta lại có $\dfrac{B'C'}{BC} = AD$ suy ra B'C' = BC.AD.

Tương tự C'D' = CD.AB, D'B' = DB.AC

Vậy BC.AD = CD.AB = DB.AC.

**Ví dụ 21:** Cho tứ diện ABCD có độ dài các cặp cạnh đối lần lượt là a, a', b, b', c, c'. Gọi V và R là thể tích và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

a) Chứng minh có một tam giác có độ dài 3 cạnh là a.a', b.b', c.c'.

b) Gọi S là diện tích tam giác đó. Chứng minh rằng: S = 6.V.R.

### Giải

a) Giả sử AB = a, CD = a', AC = b, BD = b',
AD = c, BC = c'.

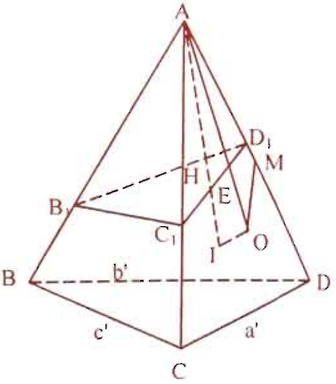
Đặt k = a.b.c

Trên AB, AC, AD ta lấy lần lượt các điểm $B_1$, $C_1$, $D_1$ thoả $AB_1.AB = AC_1.AC = AD_1.AD = k$

$\Delta AB_1C_1$ đồng dạng $\Delta ABC$

$$\Rightarrow B_1C_1 = \frac{k}{AB.AC}BC = \frac{a.b.c.c'}{ab} = cc'$$

Vậy $B_1C_1 = cc'$. Tương tự $C_1D_1 = aa'$;
$B_1D_1 = bb'$ nên $A_1B_1C_1$ là tam giác cần tìm.



b) Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD, M là trung điểm AD.

Ta có: $\widehat{AOM} = \widehat{ACD} = \widehat{AD_1C_1} \Rightarrow$ Tứ giác $OED_1M$ nội tiếp

$\Rightarrow OA \perp C_1D_1 = AI \perp C_1D_1$.

Tương tự $AI \perp B_1C_1 \Rightarrow AI \perp (B_1C_1D_1)$. AI cắt $(A_1B_1C_1)$ tại H

Ta có $AH.AI = AE.AO = AD_1.AM = \frac{1}{2}AD_1.AD = \frac{1}{2}abc. \Rightarrow AH = \frac{abc}{2R}$

Gọi $V_1$ là thể tích tứ diện $AB_1C_1D_1$.

Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{AB_1.AC_1.AD_1}{AB.AC.AC} = \frac{(abc)^3}{(abc)^2} = abc$

$\Rightarrow V_1 = V.abc = \frac{1}{3}S.AH = \frac{1}{3}S\frac{abc}{2R}$ Vậy S = 6VR.

**Ví dụ 22**: Cho tứ diện ABCD. Từ một điểm M vẽ 4 cát tuyến MAA', MBB', MCC', MDD' với mặt cầu nội tiếp. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} + \frac{\overline{MD}}{\overline{MD'}} = 4$$

**Giải**

Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD.

Gọi mặt cầu ngoại tiếp S(O; R). Ta có:

$$\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'} = \overline{MC}.\overline{MC} = \overline{MD}.\overline{MD'} = MO^2 - R^2$$

Do đó: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} + \frac{\overline{MD}}{\overline{MD'}} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{MO^2 - R^2}(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) = 4$

$\Leftrightarrow 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(MO^2 - R^2)$

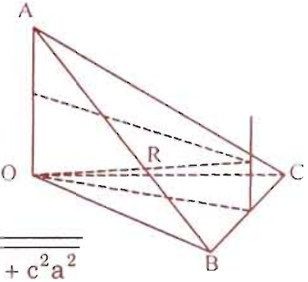
$\Leftrightarrow 4(MO^2 - MG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 4R^2 = k$ (*)

Gọi I là trung điểm OG, H là hình chiếu M lên OG thì:

(*) $\Leftrightarrow 4.2.\overline{OG}.\overline{IH} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{8\overline{OG}}$

Vậy H cố định nên tập hợp các điểm M là mặt phẳng vuông góc với OG tại H.

**Ví dụ 23**: Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại, nội tiếp tứ diện. Chứng minh: $\frac{R}{r} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}$ Khi nào đẳng thức xảy ra.



**Giải**

Đặt OA = a, OB = b, OC = c

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Ta có $r = \frac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{\frac{1}{2}abc}{\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2abc}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\right)\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}}{2abc} = \frac{3\sqrt{3}+3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

**Ví dụ 24:** Cho r, R lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp của một tứ diện có thể tích là V. Chứng minh rằng: $8R^2r \geq 3\sqrt{3}V$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào? Suy ra $V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$

**Giải**

Gọi O, G lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm tứ diện ABCD. Gọi BC = a', AD = a', CA = b', BD = b', AB = c, CD = c'. Gọi $S_a$, $S_b$, $S_c$, $S_d$, $S_{tp}$ lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D và diện tích toàn phần của tứ diện.

Ta có $AB^2 = (\overline{OB}-\overline{OA})^2 = 2R^2 - 2\overline{OA}.\overline{OB} \Rightarrow 2\overline{OA}.\overline{OB} = 2R^2 - AB^2$

Mặt khác $4\overline{OG} = \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}$

$\Rightarrow 16OG^2 = 4R^2 + \Sigma(2R^2 - AB^2)$ với Σ là tổng theo 6 cạnh

$= 16R^2 - (a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2) \geq 0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2 \leq 16R^2$

Trong tam giác ABC ta có: $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

Tương tự cho các $S_a$, $S_b$, $S_c$ rồi cộng lại ta được:

$2(a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2) \geq 4\sqrt{3}.S_{tp}$. Do đó $8R^2 \geq \sqrt{3}S_{tp}$

Mà $S_{tp} = \frac{3V}{r}$ nên $8R^2r \geq 3\sqrt{3}V$.

Dấu bằng xảy ra khi tứ diện ABCD đều

ABC

Xét phép vị tự tâm G tỉ số $k = \frac{1}{3}$ thì tứ diện ABCD biến thành tứ diện có 4 đỉnh là 4 trọng tâm A, B, C, D của 4 mặt và R = 3R'.

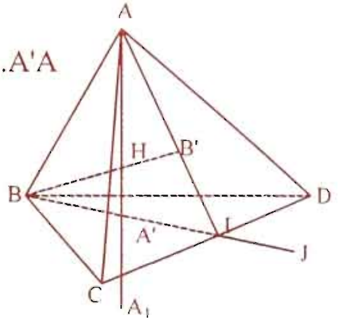
Vì $R' > r \Rightarrow R > 3r \Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 25**: Cho tứ diện ABCD có các đường cao AA', BB', CC', DD' đồng quy tại một điểm H thuộc miền trong của tứ diện. Các đường thẳng AA', BB', CC', DD' lại cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo thứ tự tại $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. Chứng minh: $\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} + \frac{DD'}{DD_1} \ge \frac{8}{3}$

**Giải**

Tứ diện ABCD đã là tứ diện trực tâm nên A' là trực tâm tam giác BCD. Gọi J là giao điểm của BI với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD thì A'I = IJ.

Do H là trực tâm tam giác ABI nên:



$$A'H.A'A = A'B.A'I = \frac{1}{2}A'B.A'J = \frac{1}{2}A'A_1.A'A$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{1}{2}A'.A_1$$

Tương tự: $B'H = \frac{1}{2}B'B_1$; $C'H = \frac{1}{2}C'C_1$,

$D'H = \frac{1}{2}D'D_1$

Từ $V_{HBCD} + V_{HCDA} + V_{HDAB} + V_{HABC} = V_{ABCD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{HBCD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HCDA}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HDAB}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HABC}}{V_{ABCD}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} + \frac{HD'}{DD'} = 1 \Rightarrow \frac{A'A_1}{AA'} + \frac{B'B_1}{BB'} + \frac{C'C_1}{CC'} + \frac{D'D_1}{DD'} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} + \frac{DD_1}{DD'} = 6$$

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$\left(\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} + \frac{DD'}{DD_1{}'}\right)\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} + \frac{DD_1}{DD'}\right) \ge 16$$

$$\Rightarrow \frac{AA}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} + \frac{DD'}{DD_1} \ge \frac{8}{3}$$

**Ví dụ 26**: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có G là trọng tâm, gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trên. Các đường thẳng $GA_1$, $GA_2$, $GA_3$, $GA_4$ cắt (S) tại $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, $A'_4$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA'_1} \le \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}$

**Giải**

Gọi O và R là tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Ta có: $GA_iGA'_i = R^2 - OG^2$

ABC

$$\Rightarrow GA_i = \frac{R^2 - OG^2}{GA'_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} GA_i = (R^2 - OG)^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA'_i}$$

BĐT $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} GA_i \le (R^2 - OG)^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i}$

Ta có $GA_i^2 = OA_i^2 + OG^2 + 2\overline{OA_i}\,\overline{OG}$

$$= R^2 + OG^2 + 2\overline{OG}(\overline{GA_i} - \overline{GO})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 = 4(R^2 - OG)^2 = \sum_{i=1}^{4} GA_i^2$$

Và $4\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 \ge \left[\sum_{i=1}^{4} GA_i\right]^2$ ; $\sum_{i=1}^{4} GA_i . \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i} \ge 16$.

Do đó: $\sum_{i=1}^{4} GA_i \le \frac{1}{16}\left[\sum_{i=1}^{4} GA_i\right]^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i} \le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} GA_i \le (R^2 - OG^2)\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i}$ (đpcm).

**Ví dụ 27**: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi R, r, h, V lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp, đường cao kẻ từ A' và thể tích của tứ diện A'AB'D'. Chứng minh: $\frac{V(h - r)}{R^2.r.h} \le \frac{2}{3}$

### Giải

Đặt AA' = a; AB' = b; A'D' = c. Ta có

$$\frac{V(h - r)}{R^2.r.h} = \frac{V\left(\frac{3.V}{S_{(AB'D')}} - \frac{3.V}{S_{tp}}\right)}{R^2.\frac{3.V}{S_{(AB'D')}}.\frac{3V}{S_{tp}}} = \frac{S_{tp} - S_{(AB'D')}}{3R^2} = \frac{S_{xq(A.A'B'D')}}{3.R^2}$$

với $S_{xq(A.A'B'D')} = \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$

Tứ diện A'AB'D' vuông tại A' nên $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Suy ra $\frac{S_{xq(A'.AB'D')}}{3R^2} = \frac{2}{3}.\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \le \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V(h - r)}{R^2.r.h} \le \frac{2}{3}$.

**Ví dụ 28**: Cho tứ diện OABC trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, có đường cao OH = h. Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{h}{r}$

### Giải

Đặt OA = a, OB = b, OC = c.

Ta có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ và $r = \frac{3V}{S_{tp}} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{S_{tp}}{3V}$

Mà $\dfrac{S_{tp}}{3V} = \dfrac{S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} + S_{\Delta ABC}}{3V} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{h}$

Do đó $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Ta có bất đẳng thức: $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2 \leq 3\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$

nên $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2 \leq \dfrac{3}{h^2} \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{h}$

Do đó $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{h} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{h} \Rightarrow \dfrac{1}{r} \leq \dfrac{1}{h}(1 + \sqrt{3})$

Vậy $\dfrac{h}{r} \leq 1 + \sqrt{3}$.

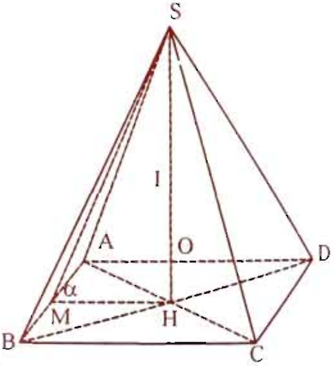
Dấu " = " xảy ra khi a = b = c.

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{h}{r}$ là $1 + \sqrt{3}$ khi OA = OB = OC.

**Ví dụ 29**: Cho hình chóp tứ giác đều, gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và mặt cầu nội tiếp của hình chóp đó. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{r}{R}$

### Giải

Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a, đường cao h. Gọi α là góc hợp bởi mặt bên với đáy. Gọi O, I lần lượt tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của hình chóp thì O, I ∈ SH.



Ta có: $OS^2 = OB^2 = OH^2 + BH^2$

$\Rightarrow R^2 = (h - R)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow R = \dfrac{a^2 + 2h^2}{4h}$

Do $h = \dfrac{a}{2}\tan\alpha \Rightarrow R = a.\dfrac{2 + \tan^2\alpha}{4\tan\alpha}$

I là chân đường phân giác của góc $\widehat{SMH}$ nên

$r = IH = \dfrac{a}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}$

Do đó: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{4\tan\alpha.\tan\dfrac{\alpha}{2}}{4 + 2\tan^2\alpha} = \dfrac{2\left(\tan^2\dfrac{\alpha}{2} - \tan^4\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^4\dfrac{\alpha}{2}}$

Xét hàm số $y = \dfrac{2(t - t^2)}{1 + t^2}$ với $t = \tan^2\dfrac{\alpha}{2}$ $\quad t \in (0; 1)$

Ta có: $y' = \dfrac{2(-t^2 - 2t + 1)}{(1 + t^2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$, chọn $t = \sqrt{2} - 1$.

BBT:

| $t$ | $0$ | | $\sqrt{2}-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | | ↗ | $\sqrt{2}-1$ | ↘ | |

Vậy $\max\dfrac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$ khi $\alpha = 2\text{arctg}\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

**Ví dụ 30**: Trong các tứ diện nội tiếp hình cầu có bán kính R = 1, tìm tứ diện có diện tích toàn phần lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

**Giải**

Trong mọi tam giác a, b, c, diện tích S thì: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Áp dụng lần lượt vào các mặt tứ diện ABCD rồi cộng lại thì được:

$$2(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2) \geq 4\sqrt{3}S_{tp}$$

Gọi O, G lần lượt là tâm và trọng tâm tứ diện ABCD, ta có:

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$

$$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})^2$$

$$= 16R^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})^2 = 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2 = 16.$$

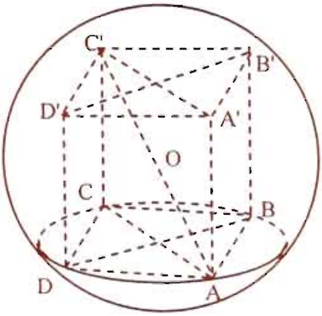
Do đó $S_{tp} \leq \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$AB = BC = CD = AC = AD = BD \text{ và } O \equiv G.$$

Do đó ABCD là tứ diện đều.

**Ví dụ 31:** Trong các hình hộp nội tiếp mặt cầu bán kính R, hãy xác định hình hộp có diện tích toàn phần lớn nhất.

**Giải:**



Mặt phẳng qua mỗi mặt hình hộp cắt mặt cầu theo một đường tròn, do đó mặt hình bình hành nội tiếp đường tròn nên là hình chữ nhật. Vậy hình hộp ABCD.A'B'C'D' nội tiếp mặt cầu là hình hộp chữ nhật.

Gọi các kích thước là AA' = a, AB = b, AD = c thì $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$

Diện tích toàn phần của hình hộp là:

$$S = 2ab + 2bc + 2ca \leq a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 = 8R^2$$

Dấu = khi: $a = b = c = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ nên hình hộp là hình lập phương.

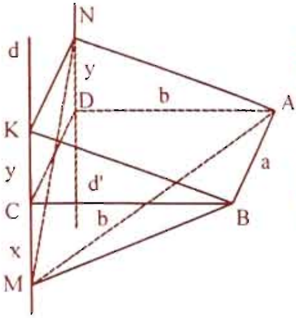
ABC

**Ví dụ 32:** Cho hình chữ nhật ABCD có AB = a, BC = b. Qua C và D vẽ các đường thẳng d và d' vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên d và d' lần lượt lấy hai điểm M và N di động. Đặt CM = x, DN = y.

a) Tìm hệ thức giữa a, b, x, y để $BM \perp AN$.

b) Xác định tâm và tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN. Xác định vị trí M và N diện tích S có giá trị bé nhất.

### Giải



a) Vẽ NK // DC ($N \in d$) $\Rightarrow$ KNDC là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ CK = x. Ta có: NK // NB,

NK = AB $\Rightarrow$ NKBA là hình bình hành.

$\Rightarrow BK \parallel AN \Rightarrow BM \perp BK$.

$\Delta KBM$ vuông tại B có đường cao BC nên:

$$BC^2 = CM.CK \Leftrightarrow b^2 = x.y$$

b) Ta có $AB \perp BC$, $AB \perp CM \Rightarrow AB \perp (BKM)$

$\Rightarrow BM \perp AB$.

Mà $BM \perp AN$ nên $BM \perp BN$.

Chứng minh tương tự ta có $NA \perp (ABM) \Rightarrow AN \perp AM$

Do đó A, B, M, N cùng thuộc mặt cầu đường kính MN, tâm là trung điểm của MN.

$$NK \perp KM \Rightarrow MN^2 = NK^2 + MK^2 = a^2 + (x+y)^2$$

Diện tích của mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 = 4\left(\frac{MN}{2}\right)^2 = MN^2 = a^2 + (x+y)^2$$

Ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2b \Rightarrow S = a^2 + (x+y)^2 \geq a^2 + 4b^2$

Vậy S có giá trị bé nhất khi và chỉ khi CM = DN = b.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Trong mặt phẳng (P) cho một đường thẳng d và điểm A ngoài d. Một góc $\widehat{xAy}$ di động quanh A, cắt d tại B và C. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với (P) lấy một điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC.

1) Chứng minh A, B, C, H, K thuộc một mặt cầu.

2) Tính bán kính mặt cầu trên biết AB = c, AC = b, $\widehat{BAC} = 60^0$

**ĐS** : 2) $R = \dfrac{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{3}$

**Bài 2**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông. Cho S là điểm di động trên đường thẳng $\Delta$ vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A. Gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và SD. Biết HI cắt BC tại M và KI cắt DC tại N. Chứng minh rằng:

1) Các điểm A, B, C, D, H, I, K cùng nằm trên mặt cầu.

2) Khi S di động trên Δ thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định

**Bài 3**: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A,B với AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC,BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

**ĐS :** $R= \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $d(A, (BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Bài 4**: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác cân, AB = AC = a, mp(SBC) ⊥ mp(ABC) và SA = SB = a.

1) Chứng minh SBC là tam giác vuông tại S.

2) Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp, biết cạnh SC = x.

**ĐS :** 2) $R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$.

**Bài 5:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, SB = 2a. Xác định tâm và tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**ĐS :** $S = 4\pi R^2 = \frac{32\pi a^2}{7}$

**Bài 6**: Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, AC = BD = b và AD = BC = c.

1) Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

2) Chứng minh có mặt cầu nội tiếp tứ diện.

**ĐS :** 1) $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{3}{64}\pi\sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{2}}$.

**Bài 7**: Trên mặt phẳng (α), cho góc $\widehat{xOy}$ Đoạn SO = a vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm M, N chuyển động lần lượt trên Ox, Oy sao cho OM + ON = a.

1) Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SOMN.

2) Chứng minh rằng khi tứ diện có thể tích lớn nhất thì nó có bán kính mặt cầu ngoại tiếp nhỏ nhất.

**ĐS :** 1) $\frac{a^3}{24}$

**Bài 8:** Cho mặt cầu S(O; R) có AB là một đường kính, vẽ các tiếp tuyến At và Bk. MN là tiếp tuyến thay đổi của mặt cầu, với M ∈ Ax, N ∈ By. T là tiếp điểm. Đặt AM = x, BN = y.

1) Chứng minh xy không đổi.Tìm giá trị bé nhất của đoạn MN.

2) Chứng minh rằng T di động trên một đường tròn.

ABC

**Bài 9**: Cho đường tròn tâm O bán kính R. Xét các hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = h cho trước, đáy ABCD là một tứ giác tuỳ ý nội tiếp đường tròn đã cho mà các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

1) Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

2) Hỏi đáy ABCD là hình gì để thể tích hình chóp đạt giá trị lớn nhất?

**ĐS :** 1) $R' = \dfrac{\sqrt{h^2 + 4R^2}}{2}$ 2) ABCD là hình vuông.

**Bài 10:** Cho tứ diện ABCD. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k^2$ với k cho trước.

**HD:** gọi O là trung điểm AB.

**Bài 11:** Cho tứ diện ABCD. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$ với k cho trước.

**HD:** dùng vectơ và gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

**Bài 12:**Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Tìm quỹ tích các điểm M: có tổng bình phương khoảng cách đến 8 đỉnh bằng $k^2$ với k cho trước.

**HD:** gọi O là tâm hình hộp.

**Bài 13:** Có bao nhiêu mặt cầu cùng tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC. Tìm quỹ tích tâm các mặt cầu đó.

**ĐS:** đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp và vuông góc (ABC)

**Bài 14:** Cho tam giác ABC vuông tại B, đoạn DA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Xác định mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Cho AB = 3a, BC = 4a, AD = 5a, tính thể tích mặt cầu.

**ĐS:** $V = \dfrac{250\pi a^3}{3\sqrt{2}}$

**Bài 15:** Ba cạnh của một tam giác có độ dài 13, 14, 15. Một mặt cầu có bán kính 5 tiếp xúc với ba cạnh tại các tiếp điểm nằm trên ba cạnh đó. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa tam giác.

**ĐS:** d = 3.

**Bài 16:**Cho mặt cầu S(O, a) và một điểm A, biết OA = 2a, qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B và cũng qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại C và D, biết $CD = a\sqrt{3}$. Tính d(O, CD) và đoạn AB, AC, AD.

**ĐS:** $d(O,CD) = \dfrac{1}{2}a$.

**Bài 17:** Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với hai cạnh SB và SC tại trung điểm mỗi cạnh đó.Tính dây cắt bởi AB, AC, AS.

**HD:** dùng phương tích.

**Bài 18:** Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A’B’C’D’. đường cao h. Mặt phẳng (A’BD) hợp với mặt bên ABB’A’ một góc $\alpha$. Tính thể tích và diện tích hình cầu ngoại tiếp.

**HD:** tâm O là trung điểm của 2 tâm của 2 đáy.

**Bài 19:** Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy a, cạnh bên b.

**HD:** 2 tâm đều thuộc trục SH.

**Bài 20:** Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp tứ giác đều cạnh đáy a, chiều cao h.

**HD:** 2 tâm đều thuộc trục SH.

**Bài 21:** Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi O trung điểm đường cao AH. Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OBCD.

**HD:** tam diện OBCD vuông

**Bài 22:** Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a, góc giữa mặt bên và đáy là $\varphi$. Tính bán kính các hình cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp và tìm giá trị của $\varphi$ để các hình cầu này có tâm trùng nhau.

**ĐS:** $\cos\varphi = \sqrt{2} - 1$.

**Bài 23:** Trong các hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu bán kính R cho trước, tìm hình có thể tích lớn nhất.

**HD:** dùng bất đẳng thức Côsi.

**Bài 24:** Trong các hình chóp tam giác đều nội tiếp mặt cầu bán kính R cho trước, tìm hình có thể tích lớn nhất.

**HD:** dùng đạo hàm.

**Bài 25:** Cho tứ diện ABCD có AD = BC = a, AC = BD = b, AB = CD = c và có diện tích toàn phần là S. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp biết rằng

$$\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2} = \frac{9}{S^2}$$

**HD:** Chứng minh tứ diện ABCD đều

**Bài 26:** Cho tứ diện SABC có 2 tam giác SBC, ABC đều cạnh a và SA = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

**ĐS:** $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}$

**Bài 27:** Cho tứ diện ABCD có hai cạnh AB = 4, CD = 12 và các cạnh còn lại đều bằng 7. Tính khoảng cách từ tâm bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD đến cạnh lớn nhất.

**ĐS:** $d = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13} + \sqrt{5}}$.

**Bài 28:** Cho tứ diện ABCD. Từ một điểm M vẽ 4 cát tuyến MAA', MBB', MCC', MDD' với mặt cầu nội tiếp. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} + \frac{\overline{MD}}{\overline{MD'}} = k.$$

**HD:** biện luận khi k = 4 và k $\neq$ 4

ABC

**Bài 29:** Cho tứ diện ABCD có tâm mặt cầu ngoại tiếp là O. Tìm tập hợp các điểm M sao cho 4 trọng tâm của 4 tứ diện MBCD, MACD, MABD, MABC cách đều tâm O.

**ĐS:** chỉ một điểm M là ảnh của O qua $V_{(G,5)}$ với G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

**Bài 30:** Cho khối đa diện $A_1$ $A_2$ …$A_n$ nội tiếp mặt cầu tâm O bán kính R. Gọi G là trọng tâm khối đa diện. Tính tổng bình phương độ dài các cạnh và đường chéo.

**ĐS:** $T = n^2(R^2 - OG^2)$

**Bài 31:** Cho 2 mặt cầu (I,R), (J,r) tiếp xúc ngoài nhau tại T và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P) lần lượt tại A, C. Gọi AB, CD lần lượt là 2 đường kính của 2 mặt cầu. Từ B, D của mặt cầu này lần lượt vẽ tiếp tuyến BM, DN với mặt cầu kia. Chứng minh $\dfrac{BA - BM}{DC - DN} = \dfrac{r}{R}$

**Bài 32:** Cho 2 mặt cầu thay đổi tiếp xúc nhau và nội tiếp trong bán cầu (O; R). Chứng minh các tiếp điểm của 2 mặt cầu nhỏ luôn nằm trên một mặt cầu cố định.

**HD:** dùng phương tích.

**Bài 33:** Cho tứ diện vuông OABC có đường cao OH cố định còn 3 đỉnh A, B, C lần lượt thay đổi trên 3 tia Ox, Oy, Oz. Gọi A' B' C' lần lượt là hình chiếu của H lên Ox, Oy, Oz. Chứng minh 6 điểm A, B, C, A' B' C' cùng nằm trên một mặt cầu và mặt cầu nầy đi qua 2 điểm cố định.

**HD:** dùng phương tích.

**Bài 34:** Cho R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp của một tứ diện có thể tích là V. Chứng minh $V \le \dfrac{8\sqrt{3}}{27}R^3$

**Bài 35:** Cho R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện ABCD, gọi $m_a$, $m_b$, $m_c$, $m_d$ lần lượt là 4 trọng tuyến. Chứng minh

$$R \ge \frac{3}{16}(m_a + m_b + m_c + m_d)$$

**HD:** dùng bình phương vô hướng.

**Bài 36:** Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc nhau. Gọi a là cạnh lớn nhất xuất phát từ A và r là bán kính mặt cầu nội tiếp. Chứng minh $a \ge (3 + \sqrt{3})\,r$.

**HD:** dùng tỉ số thể tích.

ABC

**Bài 37:** Cho hình chóp n- giác đều, gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và mặt cầu nội tiếp của hình chóp đó. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{r}{R}$

**ĐS:** $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}}$.

**Bài 38:** Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có G là trọng tâm, gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trên. Các đường thẳng $GA_1$, $GA_2$, $GA_3$, $GA_4$ cắt (S) tại $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, $A'_4$. Chứng minh rằng:

a) $GA_1.GA_2.GA_3.GA_4 \leq GA'_1.G A'_2.GA'_3.GA'_4$

b) $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i} \geq \frac{4}{R}$ với R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

**Bài 39:** Cho hai mặt cầu đồng tâm O có bán kính R > r sao cho có tứ diện đều SABC mà A, B, C thuộc (O; R) còn 3 mặt (SAB), (SBC), (SCA) tiếp xúc với (O; r). Chứng minh $\frac{r}{R} \leq \sqrt{\frac{3}{11}}$

**Bài 40:** Cho điểm A thuộc mặt cầu S(O; R). Xét các tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu và gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD. Tìm vị trí của G khi $T = AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 - DA^2$ nhỏ nhất.

**ĐS:** G là trung điểm đoạn OA.

**Bài 41:** Gọi $R_1$ ,$R_2$ $R_3$, $R_4$ là bán kính các mặt cầu bàng tiếp đỉnh A, B, C, D của tứ diện ABCD ngoại tiếp mặt cầu (I; r) cho trước. Xác định tứ diện ABCD để tổng $R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ nhỏ nhất.

**ĐS:** tứ diện ABCD là tứ diện gần đều

**Bài 42:** Cho tứ diện ABCD sao cho các cạnh AB, BC, CA đều nhỏ hơn cạnh DA, DB, DC. Xét các điểm P thỏa mãn $PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$ tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn PD.

**Bài 43:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn(O; R). Tính thể tích tứ diện ABCD biết rằng DA = BC, DB = CA, DC = AB và bán kính mặt cầu nội tiếp trong tứ diện ABCD đạt giá trị nhỏ nhất .

**ĐS:** $V = \frac{\sqrt{6}}{4}R^3$

ABC

# §2. MẶT TRỤ - KHỐI TRỤ

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

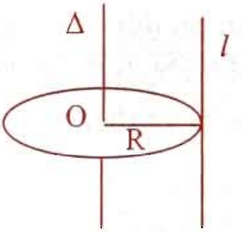
Mặt trụ là tập hợp tất cả các điểm M cách đường thẳng $\Delta$ cố định một khoảng R không đổi.

Nếu M là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ thì đường thẳng $l$ đi qua M và song song với $\Delta$ cũng nằm trên mặt trụ đó.

- Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P') vuông góc với trục được gọi là hình trụ.
- Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là khối trụ.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: MẶT TRỤ - HÌNH TRỤ



**Mặt trụ tròn xoay:** Mặt trụ tròn xoay sinh ra khi quay đường thẳng $l$ song song $\Delta$ cố định và cách $\Delta$ một đoạn R không đổi. Mặt trụ (T) có trục $\Delta$ và bán kính R.

**Hình trụ, khối trụ**

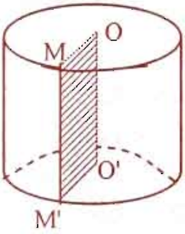
– Trục OO′

– Đường sinh MM′ = $l$

– Bán kính đáy R và chiều cao h thì $h = l = OO'$, $R = OM$

– Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rl$

– Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2h$



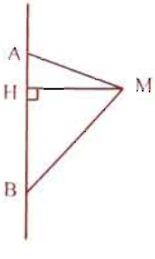
**Chú ý:**

1) Phương pháp đường sinh.

2) Thiết diện song song với trục hình trụ là một hình chữ nhật, tạo bởi 2 đường sinh song song và bằng nhau. Đặc biệt, thiết diện qua trục hình trụ là một hình chữ nhật có 2 kích thước là đường kính đáy và chiều cao hình trụ.

**Ví dụ 1**: Cho hai điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB bằng k không đổi.

**Giải**



Hạ MH vuông góc với AB. Ta có:

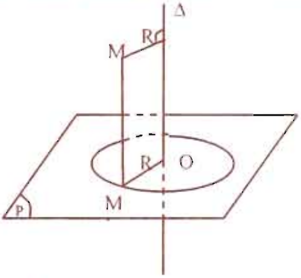
$k = S_{MAB} = \dfrac{1}{2}AB.MH \Rightarrow MH = \dfrac{2k}{AB}$ là số không đổi.

Vậy tập hợp các điểm M là mặt trụ có trục là đường thẳng AB, bán kính $R = \dfrac{2k}{AB}$

**Ví dụ 2**: Cho đường tròn (O; R) nằm trong mặt phẳng (P). Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho hình chiếu của chúng trên (P) luôn nằm trên đường tròn đã cho.

**Giải**

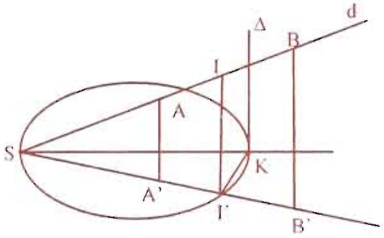
Gọi Δ là trục của đường tròn (O; R). Nếu điểm M có hình chiếu M' nằm trên (O; R) thì MM' // Δ và khoảng cách từ M tới Δ bằng M'O = R. Vậy tập hợp các điểm M là mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.



**Ví dụ 3**: Cho mặt trụ tròn xoay T và một điểm S cố định không nằm trên T. Một đường thẳng d thay đổi luôn luôn đi qua S cắt T ở A và B. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AB nằm trên một mặt trụ cố định.

**Giải**

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với trục Δ của mặt trụ tại K. Chiếu các điểm A, B, I xuống mặt phẳng (P) được A', B', I'. Vì I là trung điểm của AB nên I' là trung điểm A'B'
Vì (P) cắt mặt trục theo đường tròn tâm K qua A', B' nên KI' vuông góc với dây A'B'.



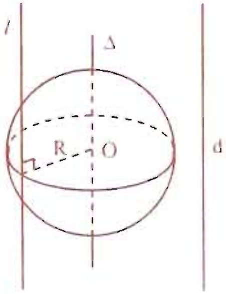
Do đó góc SI'K = $90^\circ$ nên I' chạy trên đường tròn (V) đường kính SK trên mp(P). Suy ra các điểm I nằm trên một mặt trụ cố định.

**Ví dụ 4**: Chứng minh rằng các tiếp tuyến của mặt cầu song song với một đường thẳng cố định luôn nằm trên một mặt trụ xác định.

**Giải**

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng d. Gọi Δ là đường thẳng đi qua O và song song với d. Nếu *l* là tiếp tuyến của mặt cầu và *l* // d thì *l* // Δ và *l* cách Δ một khoảng không đổi R.

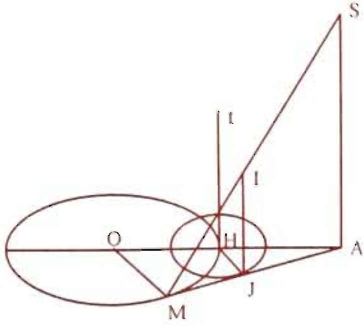
Vậy *l* nằm trên mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.



**Ví dụ 5**: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (O; R) và điểm A sao cho OA = 2R. Trên đường thẳng d vuông góc (P) tại A lấy một điểm S cố định. Cho M ∈ (O; R), gọi I, J là trung điểm SM, AM. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên (C) thì đoạn IJ sinh ra mặt xung quanh của một hình trụ.

ABC

**Giải**



Gọi H là trung điểm của OA thì $HJ = \frac{R}{2}$ suy ra J thuộc đường tròn (H; $\frac{R}{2}$) nằm trong (P).

Vì IJ là đường trung bình của tam giác SMA nên: $IJ = \frac{SA}{2}$ và $IJ \perp (P)$.

Do đó khi M chuyển động trên đường tròn (O) thì đoạn IJ sinh ra một mặt trụ có trục Ht $\perp$ (P) và bán kính $\frac{R}{2}$

**Ví dụ 6**: Một hình trụ có bán kính R và chiều cao $R\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

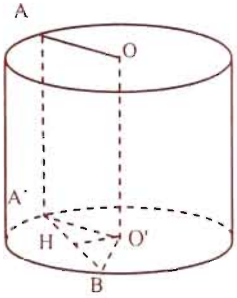
b) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng $30^{\circ}$ Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

**Giải**

a) $S_{xq} = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2\pi R^2 = 2(\sqrt{3} + 1)\pi R^2$

$V = \pi R^2 \ \ R\sqrt{3} = \sqrt{3}\pi R^3$



b) Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy.

Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì $O'A' = R$, $AA' = R\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAA'}$ bằng $30^{\circ}$

Vì OO' // mp(ABA) nên khoảng cách giữa OO' và AB bằng khoảng cách giữa OO' và mp(ABA').

Gọi H là trung điểm BA' thì khoảng cách đó bằng O'H.

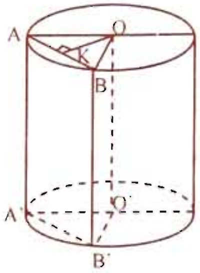
Tam giác BA'A vuông tại A' nên:

$$BA' = AA'\tan 30^{\circ} = R\sqrt{3} \ \ \frac{1}{\sqrt{3}} = R.$$

Do đó BA'O' là tam giác đều, vậy $O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

**Ví dụ 7**: Cho một khối trụ có bán kính đáy R = 5(cm) và khoảng cách giữa hai đáy là 7(cm). Người ta cắt khối trụ đó bằng một mặt phẳng song song với trục của khối trụ và cách trụ một khoảng 3(cm). Tính diện tích của thiết diện.

**Giải**



Gọi tâm của hai đáy là O và O'. Thiết diện khi cắt khối trụ là hình chữ nhật AA'B'B. Gọi K là trung điểm của AB

Ta có OK ⊥ AB ⇒ OK ⊥ AA' ⇒ OK ⊥ (AA'B'B).

Vậy OK là khoảng cách từ trục OO' tới mặt phẳng thiết diện, tức là OK = 3.

Trong tam giác vuông OKA:

$$KA^2 = OA^2 - OK^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

$\Rightarrow$ KA = 4, AB = 8.

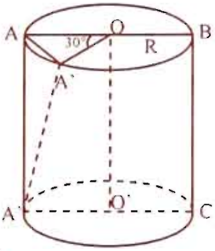
Vậy diện tích của thiết diện AA'B'B là: $S = AB.BB' = 8.7 = 56(cm^2)$.

**Ví dụ 8**: Trên hai đáy của hình trụ có đường cao gấp đôi bán kính đáy, ta lấy hai bán kính chéo nhau, đồng thời tạo với nhau một góc là $30^o$ Biết rằng đoạn thẳng nối hai đầu mút của hai bán kính không đi qua tâm đường tròn có độ dài là a.

a) Tính tan của góc hợp trục và đoạn thẳng qua 2 mút đó.

b) Tính thể tích của khối trụ,

**Giải**



a) Gọi bán kính của hình trụ là R, hai bán kính chéo nhau là OA' và O'D. Vẽ đường sinh DA thì: $g(OO', A'D) = g(AD, A'D) = \widehat{ADA'} = \alpha$

Trong tam góc AOA' cân tại O:

$$AA'^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 30^o = (2 - \sqrt{3})R^2 \Rightarrow AA' = \sqrt{2-\sqrt{3}}R$$

Tam giác ADA' vuông tại A nên: $DA'^2 = AD^2 + AA'^2$

$$\Rightarrow a^2 = (2R)^2 + (2-\sqrt{3})R^2 \Rightarrow a^2 = (6-\sqrt{3})R^2 \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{6-\sqrt{3}}}$$

Ta có: $h^2 = AD^2 = DA'^2 - A'A^2$

$$= a^2 - (2 - \sqrt{3}).\frac{a^2}{6-\sqrt{3}} = \frac{4a^2}{6-\sqrt{3}} \Rightarrow h = 2.\frac{a\sqrt{6-\sqrt{3}}}{6-\sqrt{3}}$$

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{AA'}{AD} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b) Thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi.R^2h = \pi.\frac{a^2}{6-\sqrt{3}}.2.\frac{a\sqrt{6-\sqrt{3}}}{6-\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{6-\sqrt{3}}a^3}{(6-\sqrt{3})^2}$$

**Ví dụ 9**: Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là dây cung của hai đường tròn đáy, các cạnh AD và BC không phải là đường sinh của hình trụ. Tính cạnh của hình vuông đó.

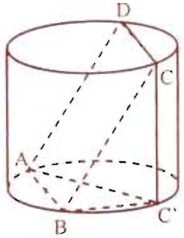
### Giải

Gọi C' là hình chiếu của C trên mặt đáy chứa AB thì AB ⊥ BC', do đó AC' là đường kính của đường tròn đáy. Từ các tam giác vuông ABC' và CBC', ta có:

$$BC'^2 = AC'^2 - AB^2 = 4R^2 - AB^2$$

$$BC'^2 = BC^2 - CC'^2 = AB^2 - R^2$$

Suy ra $2AB^2 = 5R^2$ vậy $AB = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$

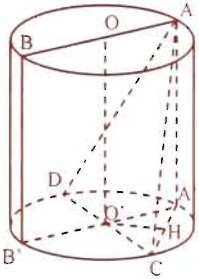


**Ví dụ 10:** Cho hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi AB và CD là hai đường kính thay đổi của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD.

a) Chứng minh rằng ABCD là tứ diện đều.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, AD, BC, BD luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định.

### Giải



a) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng chứa đường tròn đáy có đường kính CD, thì A, B thuộc đường tròn này. Khi đó A'B' ⊥ CD nên A'CB'D là hình vuông có đường chéo CD = 2R, do đó $A'C = R\sqrt{2}$, ngoài ra $AA' = R\sqrt{2}$ nên ta suy ra AC = 2R.

Tương tự ta có AD = BC = BD = 2R. Vậy ABCD là tứ diện đều.

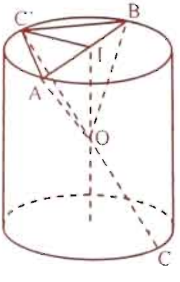
b) Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AB và CD, H trung điểm A'C.

Ta có: $d(OO'; AC) = d(OO', (AA'C)) = OH' = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Tương tự, khoảng cách giữa mỗi đường thẳng AD, BC, BD và OO' đều bằng $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ Từ đó suy ra các đường thẳng AC, AD, BC, BD đều tiếp xúc với mặt trụ có trục là OO' và có bán kính $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

**Ví dụ 11**: Trên đường tròn đáy của một hình trụ, ta lấy hai điểm xuyên tâm A và B, trên đường tròn đáy thứ hai ta lấy điểm C không nằm trên mặt phẳng (AOB), với O là trung điểm của trục hình trụ. Chứng minh rằng tổng các góc nhị diện của góc tam diện với đỉnh O và các cạnh OA, OB, OC bằng 360°

### Giải



Gọi C' là điểm đối xứng của C qua tâm O. Khi đó, nếu ở góc tam diện OABC có các góc nhị diện với các cạnh OA, OB, OC lần lượt bằng α, β, γ thì ở góc tam diện OABC' có các góc nhị diện với các cạnh OA, OB, OC lần lượt bằng: 180° – α, 180° – β, γ.

Gọi I là tâm đường tròn đường kính AB, trong tứ diện OABC', các góc nhị diện với cạnh OA và OC' bằng nhau (vì tứ diện này nhận mặt phân giác của góc nhị diện cạnh OI làm mặt phẳng đối xứng); ngoài ra, trong tứ diện OIBC', các góc nhị diện với cạnh OB và OC' bằng nhau.

Do đó: $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

**Ví dụ 12**: Mặt phẳng đi qua trục của một hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh 2R.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

b) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

**Giải**

a) Từ giả thiết ta suy ra hình trụ có bán kính đáy bằng R và đường sinh bằng 2R. Từ đó:

$S_{xq} = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$

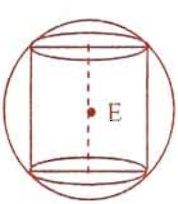
$S_{tp} = S_{xq} + 2S\text{đáy} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

$V = \pi R^2.2R = 2\pi R^2.$

b) Hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp là hình lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 2R và có đáy là hình vuông cạnh $R\sqrt{2}$ nên có thể tích:

$V_{LT} = 2R^2 \quad 2R = 4R^3$

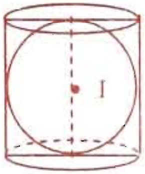
## DẠNG 2: NỘI - NGOẠI TIẾP HÌNH TRỤ



- Mặt cầu ngoại tiếp hình trụ có tâm là tâm đường tròn ngoại tiếp thiết diện hình chữ nhật qua trục hình trụ.

Tâm E là trung điểm trục OO′

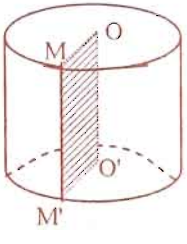
Bán kính $r = \sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4}}$



- Mặt cầu nội tiếp hình trụ chỉ tồn tại khi hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao hình trụ, có tâm là tâm đường tròn nội tiếp thiết diện hình vuông qua trục hình trụ.

Tâm I là trung điểm của trục OO′.

Bán kính r = R với điều kiện h = 2R



**Chú ý**: – Trục OO′ = h

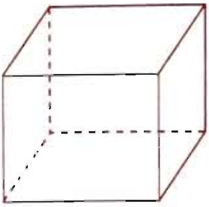
– Đường sinh MM′ = $l$ = h

– Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rl$

– Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2h$

**Ví dụ 1:** Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là a, b, c. Tính thể tích của khối trụ.

**Giải**



Khối hộp chữ nhật có thể nội tiếp trong ba khối trụ khác nhau có đường tròn đáy ngoại tiếp lần lượt các mặt hình chữ nhật, kích thước còn lại là chiều cao.

Thể tích của các khối trụ đó lần lượt là:

$$\frac{\pi(a^2+b^2)c}{4} \quad \frac{\pi(b^2+c^2)a}{4} \text{ và } \frac{\pi(c^2+a^2)b}{4}$$

**Ví dụ 2:** Một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h nội tiếp một khối trụ. Tính thể tích của khối trụ đó.

**Giải**

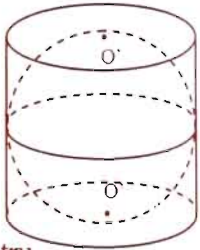
Lăng trụ tam giác đều cạnh đáy a nên đáy hình trụ ngoại tiếp là đường tròn ngoại tiếp đáy có bán kính $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, chiều cao hình trụ là chiều cao h của lăng trụ, do đó thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h = \frac{\pi a^2 h}{3}$

**Ví dụ 3:** Cho hình trụ T có bán kính R, trục OO' bằng 2R và mặt cầu (S) có đường kính OO'

a) So sánh diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ, diện tích toàn phần của hình trụ

b) So sánh thể tích của khối trụ T và khối cầu (S).

**Giải**



a) Diện tích của mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ cùng bằng $4\pi R^2$.

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

$$4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$$

Vậy diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Thể tích của khối cầu là: $V_{(S)} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích của khối trụ là: $V_T = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$

Vậy thể tích của khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của khối trụ.

**Ví dụ 4:** Cho hình trụ nội tiếp hình cầu S(O; R).

1) Hình trụ nào có diện tích xung quanh S lớn nhất.

2) Hình trụ nào có thể tích lớn nhất.

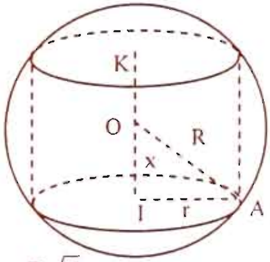
**Giải:**

1) Gọi x là khoảng cách từ tâm hình cầu O đến đáy hình trụ: OI = x.

Đáy hình trụ là đường tròn có bán kính:

ABC

$r = \sqrt{R^2 - x^2}\quad 0 < x < R$



Diện tích xung quanh hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi r.2x = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$= 4\pi\sqrt{x^2(R^2 - x^2)} \le 4\pi.\frac{x^2 + (R^2 - x^2)}{2}$$

$$= 2\pi R^2$$

Dấu = " xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

2) Thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi r^2.2x = 2\pi.x(R^2 - x^2) = -2\pi x^3 + 2\pi R^2x,\ 0 < x < R$$

$$V' = -6\pi x^2 + 2\pi R^2\ \ V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên:

| x | 0 |  | $\frac{R}{\sqrt{3}}$ |  | R |
|---|---|---|---|---|---|
| V' |  | + | 0 | − |  |
| V |  | ↗ |  | ↘ |  |

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Cách khác: dùng bất đẳng thức Côsi.

**Ví dụ 5**: Trong các hình trụ có thể tích V cho trước, tìm hình trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

**Giải:**

Gọi x, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, x, h > 0

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$$

Diện tích toàn phần $S = 2\pi xh + 2\pi x^2 = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2\ \ x > 0$

Ta có: $S' = -\frac{2V}{x} + 4\pi x;\ S' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Bảng biến thiên:

| x | 0 |  | $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S' |  | − | 0 | + |  |
| S | $+\infty$ | ↘ |  | ↗ | $+\infty$ |

Vậy thể tích bé nhất khi $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ và $h = 2.\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

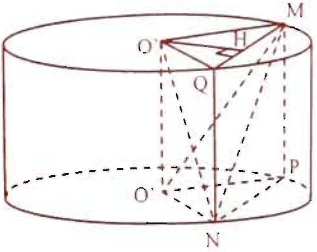
**Ví dụ 6**: Cho một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao 2R. Trên các đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm M, N. Một mặt phẳng

(P) qua MN và song song với trục hình trụ cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác MPNQ.

a) Xác định khoảng cách từ OO' đến (P) để thiết diện có diện tích bằng $2R^2$

b) Xác định vị trí M, N trên (O) và (O') để khối tứ diện MONO' có thể tích lớn nhất.

**Giải**



a) Mặt phẳng (P) // OO' nên cắt hình trụ theo thiết diện MPNQ là hình chữ nhật.

Diện tích của thiết diện là:

$$S_{MNPQ} = MQ.MP = 2R^2 \Rightarrow MQ = \frac{2R^2}{MP} = R$$

Gọi H là trung điểm MQ, ta có $OH \perp MQ$

$\Rightarrow OH \perp (P)$

Ta có tam giác OMQ đều nên khoảng cách từ trục OO' đến mặt phẳng (P) là $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

b) Xét hình chóp N.OMO', ta có: NQ // OO' $\Rightarrow$ NQ // (O'OM)

Do đó $V_{N.O'OM} = V_{Q.O'OM}$

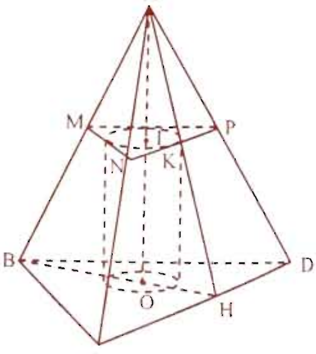
=

$$\frac{1}{3}O'O.S_{\Delta OQM} = \frac{1}{2}.2R.\frac{1}{2}OM.OQ.\sin\widehat{QMQ} = \frac{R^3}{3}\sin MOQ \le \frac{R^3}{3}$$

Vậy $V_{N.O'OM}$ đạt giá trị lớn nhất khi $\widehat{MOQ} = 90^\circ$ hay OM hợp với ON góc $90^\circ$

**Ví dụ 7**: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là tâm của tam giác BCD, dựng mp(P) vuông góc với AO tại một điểm I thuộc đoạn AO, (P) cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N và P Cho một hình trụ có một đáy là hình tròn (I) nội tiếp tam giác MNP và đáy kia nằm trên (BCD). Xác định vị trí I trên AO để khối trụ có thể tích lớn nhất.

**Giải**



Đặt IK = x, vì AMNP là tứ diện đều nên

KM = KA = 3IK = 3x.

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Suy ra $AI = \sqrt{AK^2 - KI^2} = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = x\sqrt{8}$

$$\Rightarrow IO = \frac{a\sqrt{6}}{3} - x\sqrt{8}$$

Thể tích của khối trụ là: $V = OI.S_d = \pi IK^2.IO = -\pi\sqrt{8}x + \frac{\pi a\sqrt{6}}{3}x^2$

Ta xem V là hàm số theo biến số x, với $x \in (0; \frac{a\sqrt{3}}{6})$

$$V' = -3\pi\sqrt{8}x^2 + \frac{2}{3}\pi a\sqrt{6}x \ ; \ V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{9}$$

BBT

| x | 0 | | $\frac{a\sqrt{3}}{9}$ | | $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V' | | + | 0 | − | |
| V | | ↗ | | ↘ | |

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{3}}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{IK}{OH} = \frac{3}{2}$ hay (P) ⊥ OA tại I sao cho $\frac{SI}{SO} = \frac{3}{2}$.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Một hình trụ có diện tích xung quanh là S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng a. Tính thể tích và diện tích thiết diện qua trục của hình trụ.

**ĐS :** $V = Sa$ , $S' = \frac{S}{\pi}$

**Bài 2**: Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh hình trụ là $4\pi$. Mặt phẳng ($\alpha$) song song với trục hình trụ và cắt nó theo thiết diện $ABB_1A_1$. Biết một cạnh của thiết diện là dây cung của đường tròn đáy căng một cung $120^0$ Tính diện tích toàn phần hình trụ và diện tích thiết diện $ABB_1A_1$ và thể tích khối trụ.

**ĐS :** $S_{tp} = 6\pi$,diện tích thiết diện $2\sqrt{3}$.

**Bài 3**: Cho hình trụ có hai đáy (O), (O'), bán kính đáy bằng chiều cao a. Trên (O) lấy A, trên (O') lấy B sao cho AB = 2a. Tính thể tích khối tứ diện OO'AB.

**ĐS :** $V_{OO'AB} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

**Bài 4**: Cho một hình trụ có một chiều cao 2 và bán kính đáy 7. Gọi (O) và (O') là hai đường tròn đáy. Một mặt phẳng (P) không song song với trục cắt đường tròn (O) tại A,B và cắt đường tròn (O') tại C, D sao cho ABCD là hình vuông.
Tính khoảng cách giữa trục OO' với đường thẳng CD.

**ĐS :** $d(OO'; CD) = 2\sqrt{6}$.

ABC

**Bài 5**: Cho hình trụ bán kính đáy R, chiều cao $OO' = h$, A và B là hai điểm thay đổi trên hai đường tròn đáy sao cho độ dài $AB = a$ không đổi ($h < a < \sqrt{h^2 + 4R^2}$). Chứng minh góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

**ĐS :** $\sqrt{R^2 - \frac{a^2 - h^2}{4}}$ không đổi.

**Bài 6**: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp trong một hình trụ cho trước, góc giữa đường thẳng $B_1D$ và mặt phẳng $(ABB_1A_1)$ bằng $30^0$ Khoảng cách từ trục hình trụ đến mặt $ABB_1A_1$ bằng $\frac{3}{2}a$. Tính thể tích khối hộp và thể tích hình cầu ngoại tiếp hình hộp biết đường kính của đáy hình trụ bằng 5a.

**ĐS :** thể tích hình hộp: $12a^3\sqrt{11}$ cầu : $36\pi a^3$

**Bài 7**: Cho điểm A cố định và nằm ngoài đường thẳng d cố định. Một đường thẳng a thay đổi nhưng luôn vuông góc với d và cắt d. Tìm tập hợp các điểm M là hình chiếu A lên a.

**Bài 8**: Bên trong hình trụ có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy của hình trụ một góc $45^0$ Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

**ĐS :** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$, $V = \frac{3\pi a^2\sqrt{2}}{16}$

**Bài 9:** Cho hai điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB bằng s không đổi.

**ĐS:** mặt trụ trục AB và bán kính đáy $R = \frac{2s}{AB}$.

**Bài 10:** Cho mặt trụ tròn xoay T và một điểm S cố định không nằm trên T. Một đường thẳng d thay đổi, luôn luôn đi qua S cắt T ở A và B. Chứng minh trung điểm I của AB nằm trên một mặt trụ cố định.

**HD:** chiếu lên mặt phẳng qua S, vuông góc với trục của (T).

**Bài 11:** Hình trụ có bán kính đáy R và thiết diện qua trục là hình vuông. Tính $S_{xq}$, $S_{tp}$ và V.

**ĐS:** $S_{xq} = 4\pi R^2$, $S_{tp} = 6\pi R^2$ và $V = 2\pi R^3$

ABC

**Bài 12:** Một khối trụ có bán kính đáy r = 5cm, khoảng cách hai đáy bằng 7cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục cách trục 3cm. Tính diện tích của thiết diện.

**ĐS:** $S = 56\ cm^2$

**Bài 13:** Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao bằng $R\sqrt{3}$; A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $30^0$ Tính V và d(AB,OO').

**ĐS:** $V = \pi R^3\sqrt{3}$. $d = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

**Bài 14:** Một hình trụ bán kính đáy R, có đường cao $OO' = R\sqrt{2}$. Gọi A ,B là 2 điểm trên đường tròn (O), (O') sao cho OA vuông góc với O'B. Tính thể tích tứ diện OABO' và khoảng cách giữa OO' với mặt phẳng đi qua AB, song song với OO'

**ĐS:** $d = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

**Bài 15:** Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy a và chiều cao h.Tính diện tích xung quanh của hình trụ nội tiếp.

**ĐS:** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi ah$.

**Bài 16:** Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao h. Gọi AB, CD là 2 đường kính của 2 đáy. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện ABCD.

**HD:** chia ra 2 tứ diện.

**Bài 17:** Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao 2R. Gọi M, N lần lượt là điểm bất kỳ trên 2 đáy. Tìm giá trị lớn nhất của đoạn MN.

**ĐS:** $2R\sqrt{2}$.

**Bài 18:** Tính chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong khối cầu có thể tích V cho trước.

**HD:** dùng đạo hàm.

# §3. MẶT NÓN - KHỐI NÓN

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nếu M là một điểm tuỳ ý của mặt nón khác với điểm O thì đường thẳng OM nằm hoàn toàn trên mặt nón đó.

- Phần của mặt nón giới hạn bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục được gọi là hình nón.

- Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

Kết quả: Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng (P) không đi qua đỉnh của mặt nón thì giao tuyến sẽ là:

(1) Một đường elip nếu mp(P) cắt mọi đường sinh (đặc biệt, nếu (P) vuông góc với trục của mặt nón thì giao là đường tròn).

(2) Một đường parabol nếu mp(P) song song với chỉ một đường sinh.

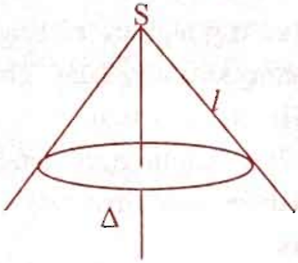
(3) Một đường hypebol nếu mp(P) song song với hai đường sinh.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: MẶT NÓN HÌNH NÓN

**Mặt nón tròn xoay:**

Mặt nón tròn xoay sinh ra khi quay đường thẳng $l$ cắt $\Delta$ cố định và hợp với $\Delta$ góc $\alpha$ không đổi, góc ở đỉnh là $2\alpha$. Mặt nón (N) có trục $\Delta$ và góc ở đỉnh là $2\alpha$.



**Hình nón, khối nón,**

– Trục SO

– Đường sinh SM = $l$

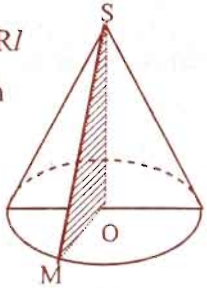
– Góc ở đỉnh là $2\alpha$.

–Bán kính đáy R và chiều cao h thì:

$l^2 = h^2 + R^2$

– Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi R l$

– Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



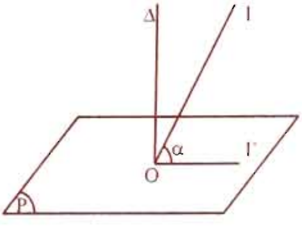
**Chú ý:**

1) Phương pháp đường sinh.

2) Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón thì cắt mặt nón theo 2 đường sinh SA, SB bằng nhau tạo thành tam giác cân SAB. Đặc biệt , thiết diện đi qua trục hình nón thì là tam giác cân SAB với SA, SB là 2 đường sinh bằng nhau và AB là đường kính đáy.

**Ví dụ 1**: Trong mặt phẳng (P) cho điểm O cố định. Xét những đường thẳng $l$ thay đổi luôn luôn đi qua O và hợp với (P) một góc không đổi. Chứng minh rằng $l$ luôn luôn nằm trên một mặt nón.

**Giải**



Hình chiếu của $l$ trên (P) là $l'$.

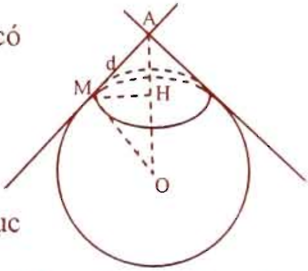
Theo giả thiết $g(l, (P)) = g(l, l') = \alpha$ không đổi.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mp(P) tại O, thì góc hợp bởi $l$ và Δ bằng $90^\circ - \alpha$ cũng không đổi.

Vậy $l$ nằm trên mặt nón đỉnh O trục là Δ và góc ở đỉnh $2(90^\circ - \alpha)$.

**Ví dụ 2**: Cho mặt cầu S(O; R) và A nằm ngoài mặt cầu. Chứng minh rằng các đường thẳng d qua A và tiếp xúc với S(O; R) nằm trên một mặt nón.

**Giải**



Cho đường thẳng d tiếp xúc (S) tại M, ta có $OM \perp AM$ suy ra tam giác AOM vuông tại M.

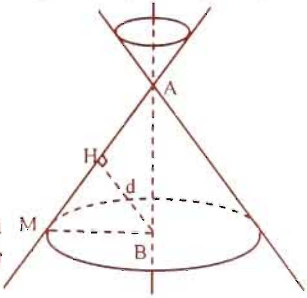
$\Rightarrow \sin \widehat{MAO} = \dfrac{OM}{AO} = \dfrac{R}{AO}$ không đổi.

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \alpha$ không đổi.

Vậy đường thẳng d nằm trên mặt nón có trục AO, đỉnh A và góc ở đỉnh là $2\alpha$

**Ví dụ 3:** Cho hai điểm A, B cố định. Tìm tập hợp những đường thẳng d qua A và cách B một đoạn không đổi bằng d.

**Giải**



Hạ $BH \perp d \Rightarrow \Delta ABH$ vuông tại H.

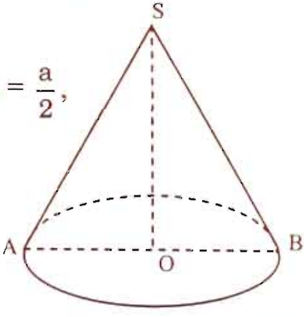
$\Rightarrow \sin \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{d}{AB}$ không đổi.

Do đó $\widehat{BAH} = \alpha$ không đổi

Vậy tập hợp các đường thẳng d là mặt nón nhận đường thẳng AB làm trục, có đỉnh là A và góc ở đỉnh là $2\alpha$.

**Ví dụ 4**: Thiết diện đi qua trục của một khối nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Tính thể tích và diện tích xung quanh của khối nón đó.

**Giải**



Theo giả thiết thì hình nón có bán kính đáy $R = h = \dfrac{a}{2}$,

đường sinh $l = a\sqrt{2}$.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi a^3}{24}$

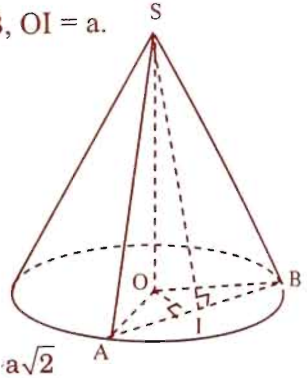
$S_{xq} = \pi R l = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

ABC

**Ví dụ 5**: Cho hình nón đỉnh S đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0$ $\widehat{SAB} = 60^0$ Tính thể tích, diện tích xung quanh hình tròn.

**Giải:**

Gọi I là trung điểm của AB thì OI ⊥ AB, SI ⊥ AB, OI = a.



Ta có: $AO = SA\cos\widehat{SAO} = \frac{\sqrt{3}}{2}SA$

$$AI = SA\cos\widehat{SAI} = \frac{1}{2}SA$$

Từ đó: $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ mà $\cos\widehat{IAO} = \frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sin\widehat{IAO} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA} \Rightarrow R = OA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét tam giác SAO, ta có: $h = SO = OA.\tan30^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$l = SA = \frac{OA}{\cos 30^0} = \frac{a\sqrt{6}}{2}\ \frac{2}{\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$$

Thể tích và diện tích xung quanh hình nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi OA^2.SO = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}.\ S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi a^2\sqrt{3}.$$

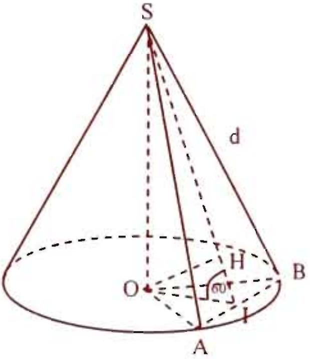
**Ví dụ 6**: Cho hình nón S, góc giữa đường sinh d và mặt đáy là α. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S, hợp với mặt đáy góc $60^0$ Tính diện tích thiết diện và khoảng cách từ O đến mp(P)

**Giải:**

Thiết diện là tam giác SAB cân tại S.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có AB ⊥ OI, SI $\Rightarrow \widehat{SIO} = 60^0$

ΔSOA, ΔSOI vuông tại O nên:



$SO = d.\sin\alpha$, $OA = d.\cos\alpha$

$\Rightarrow SI = \frac{2d\sin\alpha}{\sqrt{3}}.\ \ OI = \frac{d\sin\alpha}{\sqrt{3}}$

$$AI^2 = OA^2 - OI^2 = \frac{d^2}{3}\ (3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$\Rightarrow AI = \frac{d}{\sqrt{3}}.\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$ nên:

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}SI.AB = \frac{2d^2\sin\alpha}{3}\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$$

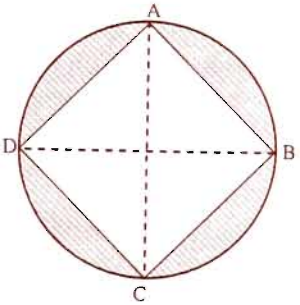
Vẽ OH ⊥ SI ⇒ OH ⊥ (SAB), do đó OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB)

ΔOHI là nửa tam giác đều nên: $d(O,(P)) = OH = \frac{OI\sqrt{3}}{2} = \frac{d.\sin\alpha}{2}$

ABC

**Ví dụ 7:** Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi H là hình gồm các điểm của hình tròn (O; R) nhưng không nằm trong hình vuông. Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi hình H khi quay quanh đường thẳng AC.

**Giải**



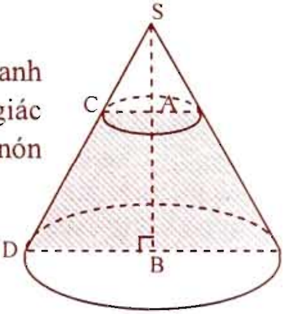
Khi quay quanh đường chéo AC thì hình tròn (O;R) sinh ra khối cầu (S), đoạn thẳng BD sinh ra hình tròn (C) và hình vuông ABCD sinh ra hình tròn xoay (H) gồm hai hình nón có chung đáy là (C) với đỉnh là A và C.

Bởi vậy, (H) sinh ra khối tròn xoay gồm những điểm thuộc hình cầu (S) nhưng không thuộc (H) và thể tích V của khối đó là:

$$V = V_{(S)} - V_H = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2.\frac{1}{3}\pi R^2.R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

**Ví dụ 8**: Cho hình thang ABCD vuông ở A và B quay xung quanh đường thẳng chứa AB ta được một khối gọi là khối nón cụt. Hãy tính thể tích của khối nón cụt khi biết các cạnh của hình thang là: AB = h, AC = R', BD = R trong đó R > R'.

**Giải**



Gọi S là giao điểm của DC và AB. Khi quay quanh AB, tam giác SAC sinh ra khối nón N', còn tam giác SBD sinh ra khối nón N. Gọi V là thể tích khối nón cụt thì:

$$V = V(N) - V(N')$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^2.SB - \frac{1}{3}\pi R'^2 SA.$$

Ta có: $\frac{SA}{SB} = \frac{AC}{BD} = \frac{R'}{R}$

Suy ra $\frac{SA}{SB - SA} = \frac{R'}{R - R'} \Rightarrow \frac{SA}{h} = \frac{R'}{R - R'} \Rightarrow SA = \frac{hR'}{R - R'}$

Từ đó $SB = SA + h = \frac{hR}{R - R'}$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \ \frac{hR}{R - R'} - \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{hR'}{R - R'} = \frac{\pi h(R^3 - R'^3)}{3(R - R')}$

$$= \frac{\pi h}{3}(R^2 + R'^2 + RR').$$

**Ví dụ 9**: Một hình thang cân ABCD có các cạnh đáy AB = 2a, DC = 4a, cạnh bên AD = BC = 3a. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của khối tròn xoay sinh bởi hình thang đó khi quay quanh trục đối xứng của nó.

ABC

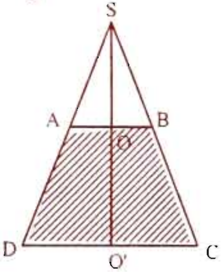
**Giải**

Gọi S là giao điểm của hai cạnh bên AD và BC của hình thang. Đường cao SO của tam giác cân SCD là trục đối xứng của hình thang, do đó SO cắt AB tại trung điểm O' của AB.

Khi quay quanh SO, tam giác SCD sinh ra khối nón có thể tích $V_1$, tam giác SAB sinh ra khối nón, có thể tích $V_2$, còn hình thang ABCD sinh ra một khối tròn xoay (H) có thể tích $V = V_1 - V_2$.

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi.OC^2\ \ SO - \frac{1}{3}\pi.O'B^2.SO' = \frac{1}{3}\pi.4a^2.SO - \frac{1}{3}\pi a^2 SO'$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2(4SO - SO').$$



Ta có AB là đường trung bình của tam giác SCD nên SB = 3a và do đó:

$$SO' = \sqrt{SB^2 - O'B^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a \text{ và}$$

$$SO = 2SO' = 4\sqrt{2}a$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi a^2\left(16\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}a\right) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$$

Gọi $S_1$ và $S_2$ lần lượt là diện tích xung quanh của 2 khối nón thì khối tròn xoay (H) có:

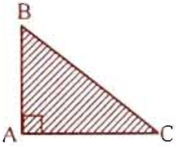
$$S_{xq} = S_1 - S_2 = \pi.OC.SC - \pi O'B.SB = 9\pi a^2$$

$$S_{tp} = 9\pi a^2 + \pi a^2 + 4\pi a^2 = 14\pi a^2$$

**Ví dụ 10:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b,. Gọi $V_1$, $V_2$, $V_3$ là thể tích của các khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó khi lần lượt quay quanh AB, AC, BC.

a) Tính $V_1$, $V_2$, $V_3$ theo b, c

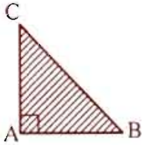
b) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{1}{V_1^2} + \dfrac{1}{V_2^2}$



**Giải**

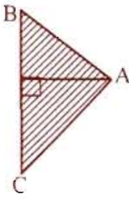
a) Khi quay tam giác ABC quanh AB, ta được khối nón có chiều cao c và bán kính đáy là b nên nó có thể tích:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi cb^2$$



Khi quay tam giác ABC quanh AC, ta được khối nón có chiều cao b và bán kính đáy là c nên có thể tích:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi bc^2$$



Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Khi quay tam giác ABC quanh BC, ta được hai khối nón sinh bởi tam giác ABH và ACH khi quay quanh BC.

$$\text{Vì } AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \text{ nên } V_3 = \frac{1}{3}\pi.AH^2\ .\ BH + \frac{1}{3}.\pi.AH^2\ \ CH$$

ABC

$$= \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC$$

$$= \frac{1}{3}\pi.\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}.\sqrt{b^2+c^2} = \frac{1}{3}\frac{\pi b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

b) Ta có $\frac{1}{V_3^2} = \frac{9(b^2+c^2)}{\pi^2b^4c^4} = \frac{9b^2}{\pi^2b^4c^4} + \frac{9c^2}{\pi^2b^4c^4} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_1^2}$

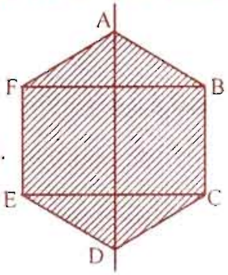
**Ví dụ 11:** Cho lục giác đều ABCDEF cạnh a. Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh:

a) Đường thẳng AD.

b) Đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và DE.

**Giải**

a) Khi quay lục giác đều ABCDEF quanh đường thẳng AD, ta được khối tròn xoay hợp bởi ba khối: khối nón sinh bởi tam giác ABF, khối trụ sinh bởi hình chữ nhật BCEF và khối nón sinh bởi tam giác DCE. Hai khối nón và khối trụ đều có bán kính đáy là

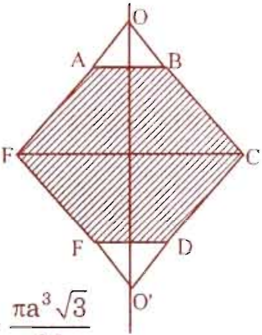


$$R = \frac{BF}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Khối trụ có chiều cao a và các khối nón có chiều cao $\frac{a}{2}$.

Vậy khối tròn xoay sinh bởi lục giác đã cho có thể tích là:

$$V = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a + 2.\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{a}{2} = \pi a^3$$



b) Gọi Δ là đường thẳng nối trung điểm của AB và ED. Khi đó BC và AF cắt nhau tại điểm O trên Δ, CD và FE cắt nhau tại điểm O' trên Δ. Gọi V, $V_1$, $V_2$ là thể tích của các khối tròn xoay lần lượt sinh ra bởi lục giác đều ABCDEF, tam giác OCF và tam giác OAB khi quay quanh Δ, ta có:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3};\ V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$$

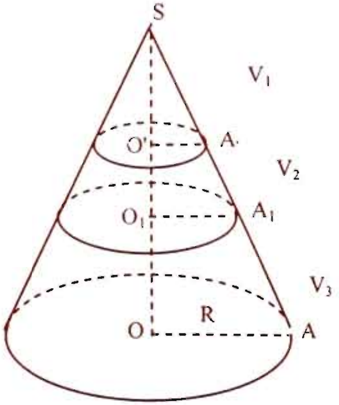
Do đó $V = 2(V_1 - V_2) = \frac{7\sqrt{3}\pi a^3}{12}$

**Ví dụ 12**: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng R, đường cao SO. Một mặt phẳng (P) cố định vuông góc với SO tại O' cắt nón (N) theo đường tròn có bán kính R'. Mặt phẳng (Q) thay đổi, vuông góc với SO tại điểm $O_1$ ($O_1$ nằm giữa O và O') cắt hình tròn theo thiết diện là hình tròn có bán kính x. Hãy tính x theo R và R' để (Q) chia phần hình nón nằm giữa (P) và đáy hình nón thành hai phần có thể tích bằng nhau.

ABC

**Giải:**

Gọi $V_1$ là thể tích phần hình nón giữa đỉnh S và mp(P). $V_2$ là thể tích phần hình nón giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). $V_3$ là thể tích phần hình nón giữa mặt phẳng (Q) và đáy hình nón đã cho.



Ta có: $\dfrac{V_1}{V_1 + V_2} = \left(\dfrac{R'}{x}\right)^3$

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_1 + V_2} = \left(\frac{R}{x}\right)^3$$

Mà $\quad V_3 = V_2$

Suy ra : $\dfrac{V_1 + 2V_2}{V_1 + V_2} = \left(\dfrac{R}{x}\right)^3$

Do đó: $\dfrac{2(V_1 + V_2)}{V_1 + V_2} = \left(\dfrac{R}{x}\right)^3 + \left(\dfrac{R'}{x}\right)^3 = \dfrac{R^3 + R'^3}{x^3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{R^3 + R'^3}{2}}$.

**Ví dụ 13**: Chứng minh rằng thể tích V và diện tích xung quanh S của một hình nón tròn xoay tuỳ ý thoả mãn bất đẳng thức: $\left(\dfrac{6V}{\pi}\right)^2 \le \left(\dfrac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

**Giải**

Gọi bán kính đáy và đường sinh hình nón là x và y

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi x^2\sqrt{y^2 - x^2}$ và $S = \pi xy$ với $0 < x < y$.

BĐT $\Leftrightarrow 4x^4(y^2 - x^2) \le \dfrac{8x^3y^3}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} - \dfrac{x^3}{y^3} \le \dfrac{2}{(\sqrt{3})^3}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \frac{x}{y} + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \ge 0 \quad (1)$$

Vì $0 < \dfrac{x}{y} < 1$ do đó đặt $\dfrac{x}{y} = \cos\varphi$ với $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ thì

(1) $\Leftrightarrow \cos^3\varphi - \dfrac{1}{(\sqrt{3})^3} - \left(\cos\varphi - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \ge 0$

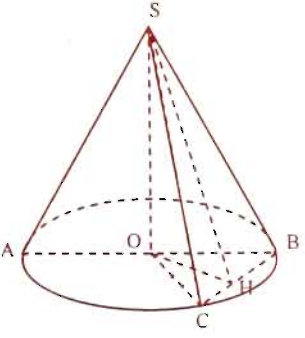
$$\Leftrightarrow \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos^2\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi - \frac{2}{3}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \ge 0 \text{ : Đúng}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $y = \sqrt{3}x$.

ABC

**Ví dụ 14**: Chứng minh rằng trong một mặt nón, góc ở đỉnh lớn hơn hay bằng bất cứ góc nào do hai đường sinh tạo nên:



**Giải**

Thiết diện qua trục SO là tam giác cân SAB, góc ở đỉnh $\widehat{ASB} = 2\alpha$ nên $\widehat{OSB} = \alpha$

Vẽ đường sinh SC, gọi H là trung điểm của BC thì tam giác SBC cân tại S nên $\widehat{BSC} = 2\beta$, $\beta = \widehat{BSH}$.

Trong hai tam giác vuông OSB, BSH:

$\sin\alpha = \dfrac{OB}{SB}$ $\quad \sin\beta = \dfrac{HB}{SB}$

Vì đường kính $AB \geq BC \Rightarrow OB \geq HB \Rightarrow \sin\alpha \geq \sin\beta$

Hơn nữa góc $\alpha$, $\beta$ nhọn nên $\alpha \geq \beta$: đpcm.

**Ví dụ 15:** Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau, góc giữa chúng là $\alpha$, đường vuông góc chung là AB ($A \in a$, $B \in b$), AB = h, O là trung điểm của AB, C là điểm di động trên đường thẳng a. Mặt nón tròn xoay có trục là OC và một đường sinh là a, cắt đường thẳng b ở D và $D_1$.

a) Chứng minh: hình chiếu vuông góc H của O lên CD nằm trên một trong hai đường tròn cố định.

b) Tính thể tích hình chóp $ACDD_1$.

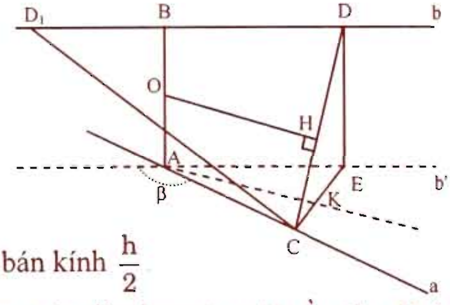
**Giải**

a) Qua A, dựng đường thẳng b' // b. Dựng DE // BA ($E \in b'$).

Dựng HK // DE ($K \in CE$). Ta có: $\dfrac{KC}{KE} = \dfrac{HC}{HD} = \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AC}{AE}$

nên AK là một phân giác của góc giữa hai đường thẳng a và b'.

Suy ra: H thuộc một trong hai mặt phẳng phân giác của góc giữa hai mặt phẳng: (AB, a) và (b, b').



Mặt khác H thuộc mặt cầu tâm O, bán kính $\dfrac{h}{2}$

Do đó H thuộc một trong hai đường tròn là giao của mặt cầu tâm O, bán kính $\dfrac{h}{2}$ và hai mặt phẳng: (AB, a) và (b, b').

b) Ta có: $V_{ACDD_1} = V_{CABD} + V_{CABD_1}$

$$V_{CABD} = V_{DABC} = V_{EABC} = V_{BACE} = \frac{1}{6}.h.AC.AE.\sin\alpha$$

Đặt x = CA, y = AE thì: $DC^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

và $DC^2 = h^2 + CE^2 = h^2 + x^2 + y^2 - 2xy.\cos\alpha$

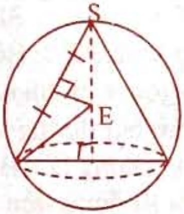
ABC

Suy ra: $xy = \dfrac{h^3.\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \Rightarrow V_{CABD} = \dfrac{h^3.\sin\alpha}{12(1+\cos\alpha)}$

Tương tự: $V_{CABD_1} = \dfrac{h^3.\sin\beta}{12(1+\cos\beta)}$. với $\alpha + \beta = \pi$

Từ đó thì được $V_{ACDD_1} = \dfrac{h^3}{6\sin\alpha}$

## DẠNG 2: NỘI - NGOẠI TIẾP HÌNH NÓN



Mặt cầu nội, ngoại tiếp hình nón có tâm là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp thiết diện qua trục hình nón.

**Ngoại tiếp khối nón:**

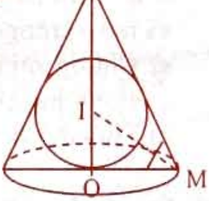
Tâm E là giao điểm của trục SO và trung trực của 1 đường sinh

Bán kính r = SE.

**Nội tiếp hình nón**:

Tâm I là giao điểm của trục SO và phân giác của góc tạo bởi đường sinh SM với OM.

Bán kính r = IO

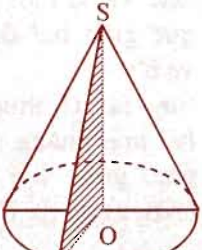


**Chú ý:**

Ta sử dụng tam giác vuông đồng dạng để tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp r = SE và tính chất phân giác IO/IS = MS/MO hoặc tam giác vuông IOM để tính bán kính mặt cầu nội tiếp r = IO.

Hình nón, khối nón,

- Trục SO
- Đường sinh SM = $l$
- Góc ở đỉnh là $2\alpha$.
- Bán kính đáy R và chiều cao h thì: $l^2 = h^2 + R^2$
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi R l$
- Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

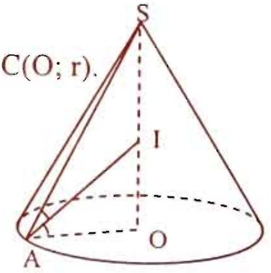


**Ví dụ 1:** Một hình nón có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng r. Hãy tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón đó.

**Giải**

Giả sử hình nón có đỉnh S và có đáy là đường tròn C(O; r).

Lấy điểm A cố định trên đường tròn đáy và gọi I là điểm nằm trên SO sao cho AI là phân giác của góc SAO thì I tâm của mặt cầu nội tiếp hình nón, bán kính R = IO.



Ta có $SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$

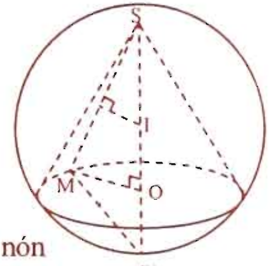
Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow \frac{IO}{IO + IS} = \frac{OA}{OA + SA} \Rightarrow \frac{IO}{h} = \frac{r}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $R = IO = \dfrac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$

**Ví dụ 2**: Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó.

**Giải**



Giả sử hình nón có đỉnh S và lấy điểm M cố định trên đường tròn đáy (O; r) thì tam giác SOM vuông ở O. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình nón là giao điểm của SO và mặt phẳng trung trực của SM, bán kính R = IS.

Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón (SS' > h). Tam giác SMS' vuông tại M, có đường cao MO nên:

$$MO^2 = OS.OS' \Rightarrow r^2 = h(SS' - h) \Rightarrow SS' = \frac{r^2}{h} + h = \frac{r^2 + h^2}{h}$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là: $R = \dfrac{r^2 + h^2}{2h}$

**Ví dụ 3:** Cho hình nón có góc đỉnh $2\alpha$. Chứng minh tỉ số bán kính mặt cầu ngoại tiếp và bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón là: $\dfrac{\cot\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha}$

**Giải**

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp R và bán kính mặt cầu nội tiếp cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r của thiết diện qua trục là tam giác cân SBC.

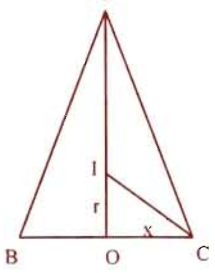
Gọi x là bán kính đáy hình nón

Theo định lý hàm số sin trong ΔSBC:

$$\frac{BC}{\sin S} = 2R \Rightarrow R = \frac{x}{\sin 2\alpha}$$

Trong tam giác vuông OIC:

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{x} \Rightarrow r = x\tan(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$



Do đó $\dfrac{R}{r} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha\left(\tan 45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{\cot\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha}$

ABC

**Ví dụ 4:** Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = R\sqrt{2}$. Xét hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O; R)$.

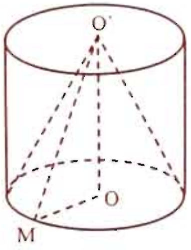
a) Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

**Giải**

a) Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_1 = 2\pi R.R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi R^2$$



Lấy một đường sinh O'M của hình nón thì:

$$O'M = \sqrt{OO'^2 + OM^2} = \sqrt{2R^2 + R^2} = R\sqrt{3}$$

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_2 = \pi R.R\sqrt{3} = \pi R^2\sqrt{3}.$$

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

b) Khối trụ và khối nón có cùng đáy và cùng chiều cao nên thể tích của khối trụ bằng ba lần thể tích của khối nón. Như vậy, mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần: Khối nón và phần còn lại có thể tích bằng hai lần thể tích của khối nón.

Vậy tỉ số thể tích của hai phần đó là $\dfrac{1}{2}$

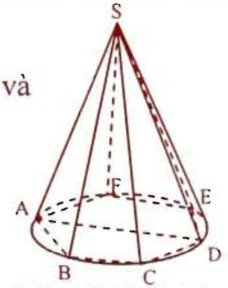
**Ví dụ 5:** Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF cạnh đáy a, cạnh bên b. Tính diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp.

**Giải**

Hình nón ngoại tiếp có đường sinh bằng cạnh bên b và bán kính đáy :

$$R = \frac{AD}{2} = BC = a.$$

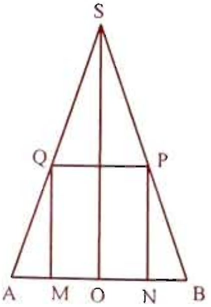
Vậy $S_{xq} = \pi R.l = \pi ab$.



**Ví dụ 6:** Một hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 3, có đáy là hình tròn có bán kính 1. Một hình lập phương nội tiếp trong đó sao cho một mặt thì nằm trên mặt phẳng đáy, 4 đỉnh của mặt đối diện của hình lập phương thì thuộc mặt nón. Tính thể tích hình lập phương.

**Giải**

Ta xét mặt phẳng chứa trục hình nón và hai đỉnh đối diện của đáy hình lập phương. Mặt phẳng này sẽ cắt hình lập phương theo thiết diện là hình chữ nhật MNPQ có một cạnh bằng $MQ = s$, cạnh kia bằng $MN = s\sqrt{2}$, với s là độ dài cạnh của hình lập phương.



Mặt phẳng nói trên cũng cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Các tam giác đồng dạng AQM và ASO cho ta:

$$\frac{s}{3} = \frac{1 - \frac{s\sqrt{2}}{2}}{1}. \text{ suy ra } s = \frac{9\sqrt{2} - 6}{7}$$

Vậy $V = s^3 = \dfrac{(9\sqrt{2} - 6)^3}{343}$

**Ví dụ 7**: Tìm hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước.

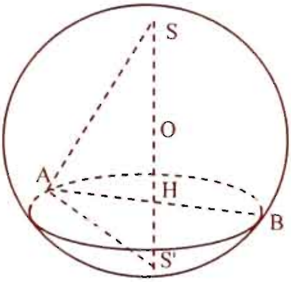
**Giải:**

Gọi bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y ($0 < x \le R$, $0 < y < 2R$).

Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì:

$$AH^2 = HS.HS' \Rightarrow x^2 = y(2R - y)$$

Gọi $V_1$ là thể tích khối nón thì:



$$V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y(2R - y)$$

$$= \frac{\pi}{6}(4R - 2y).y.y \le \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R - 2y + y + y}{3}\right)^2$$

$$= \frac{32\pi R^3}{81}$$

$V_1$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi $4R - 2y = y$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{4R}{3}$. từ đó $x^2 = \dfrac{8R^2}{9}$, hay $x = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$

**Ví dụ 8**: Cho một hình cầu bán kính r = 1, nội tiếp một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy R.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa h và R.

b) Xác định h và R để thể tích hình nón có giá trị nhỏ nhất.

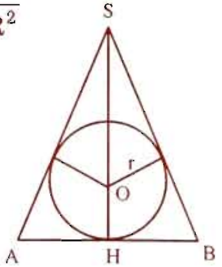
**Giải**

a) Cắt mặt cầu và hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) qua trục SH của hình nón ta được một đường tròn (O; r) nội tiếp tam giác cân SAB

Ta có: r = OH, h = SH và R = HA.

$$p = \frac{AB + SA + SB}{2} = \frac{2R + 2\sqrt{h^2 + R^2}}{2} = R + \sqrt{h^2 + R^2}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}.SH.AB = SH.AH = Rh$$



Ta có: $S_{SAB} = pr \Leftrightarrow Rh = R + \sqrt{h^2 + R^2}$

$$\Leftrightarrow R(h - 1) = \sqrt{h^2 + R^2}$$

$$\Leftrightarrow R^2(h^2 - 2h + 1) = h^2 + R^2$$

ABC

$\Leftrightarrow R^2(h-2) = h,\ h > 2.$

b) Thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{(h-2)}$

Xem V là hàm số theo biến h, h > 2.

$V' = \frac{\pi(h^2-4h)}{3(h-2)^2}$. $V' = 0 \Leftrightarrow h = 4$.

BBT:

| h | 2 |  | 4 |  | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| V ' |  | − | 0 | + |  |
| V |  | ↘ |  | ↗ |  |

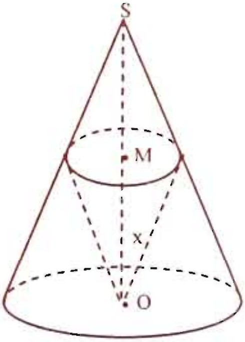
Vậy $\min V = \frac{8\pi}{3}$ khi h = 4, R = 2.

**Ví dụ 9**: Cho một khối nón đỉnh S, đường cao SO = h, bán kính đáy bằng R; M là một điểm trên đoạn OS, đặt OM = x, 0 < x < h.

a) Tính diện tích của thiết diện (C) khi cắt khối nón bởi mặt phẳng đi qua M và vuông góc với OS.

b) Tính thể tích V của khối nón đỉnh O mà đáy là (C) theo R và x. Xác định x sao cho V có giá trị lớn nhất.

**Giải**



a) Thiết diện là một hình tròn bán kính R' mà

$$\frac{R'}{R} = \frac{SM}{SO} = \frac{h-x}{h} \text{ hay } R' = \frac{R(h-x)}{h}$$

Vậy diện tích của thiết diện là:

$$S = \frac{\pi R^2(h-x)^2}{h^2}$$

b) Thể tích khối nón đỉnh O đáy là đường tròn (C) là:

$$V = \frac{1}{3}\frac{\pi R^2(h-x)^2.x}{h^2}$$ Ta có:

$$V = \frac{\pi R^2}{6h^2}(h-x)^2.2x \le \frac{\pi R^2}{6h^2}\left(\frac{h-x+h-x+2x}{3}\right)^3 \text{ nên } V \le \frac{4\pi R^2.h}{27}.$$

$V_{max}$ khi $h - x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$

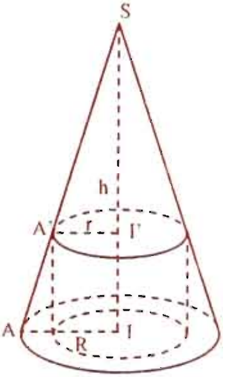
**Ví dụ 10:** Cho hình nón tròn xoay (H) đỉnh S, đáy là hình tròn bán kính R, chiều cao bằng h. Gọi (H') là hình trụ tròn xoay có đáy là hình tròn bán kính r (0 < r < R) nội tiếp (H).

a) Tính tỉ số thể tích của (H') và (H)

b) Xác định r để (H') có thể tích lớn nhất.

ABC

### Giải



a) Gọi I và I' là các giao điểm của đường cao hình nón (H) và hai đáy của hình trụ (H').

Khi đó $\frac{r}{R} = \frac{SI'}{h}$

Do đó $\frac{R-r}{R} = \frac{h-SI'}{h} = \frac{I'I}{h}$ nên $I'I = \frac{h(R-r)}{R}$

Ta có: $V_{(H)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. $V_{(H')} = \pi r^2 \frac{h(R-r)}{R}$

Do đó $\frac{V_{(H')}}{V_{(H)}} = \frac{3r^2(R-r)}{R^3}$

b) Thể tích của (H') lớn nhất khi $r^2(R-r)$ là lớn nhất.
Xét hàm số $f(r) = r^2(R-r)$ với $0 < r < R$.

Ta có $f'(r) = 2Rr - 3r^2$  $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2R}{3}$

Lập BBT thì $\max f = f(\frac{2R}{3})$  Vậy $V_{(H')}$ lớn nhất khi $r = \frac{2R}{3}$

**Ví dụ 11**: Cho góc vuông xOy và hai điểm M, N lần lượt di động trên Ox và Oy sao cho MN = 2a không đổi. Gọi A, B, C lần lượt là trung điểm các đoạn OM, MN, ON. Đặt OA = x (0 < x < 2a). Hai cạnh MN, MO của tam giác MON và các đoạn CB, BA, AO quay quanh NO sinh ra một hình nón và một hình trụ nội tiếp hình nón có chung trục NO.

a) Tính diện tích xung quanh $S_1$ của hình nón và diện tích toàn phần $S_2$ của hình trụ theo a và x.

b) Xác định OM để tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ đạt giá trị lớn nhất.

### Giải

a) Ta có ABCD là hình chữ nhật và $AB = \sqrt{MB^2 - MA^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

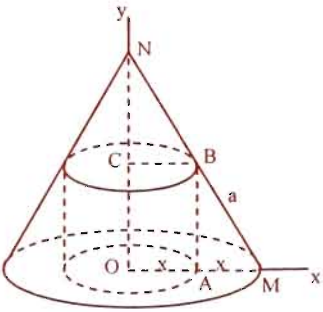
Diện tích xung quanh của hình nón là

$S_1 = \pi OM.MN = \pi 2x2a = 4\pi xa.$

Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$S_2 = 2\pi OA.AB + 2\pi OA^2$

$= 2\pi x\sqrt{a^2 - x^2} + 2\pi x^2$



b) Ta có: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi x^2 + 2\pi x\sqrt{a^2 - x^2}}{4\pi ax}$

$= \frac{1}{2a}(x + \sqrt{a^2 - x^2})$

Xét $y = x + \sqrt{a^2 - x^2}$ với $0 < x < a$ thì $y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

ABC

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = x \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (vì $x > 0$).

BBT:

| $x$ | $0$ |  | $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ |  | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ |  | $+$ | $0$ | $-$ |  |
| $y$ |  | ↗ | CĐ | ↘ |  |

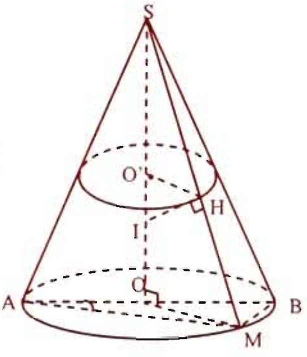
Vậy tỉ số diện tích $\dfrac{S_1}{S_2}$ đạt giá trị lớn nhất khi $OM = 2x = a\sqrt{2}$.

**Ví dụ 12**: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O đường kính $AB = 2R$. Lấy một điểm S thuộc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O sao cho $OS = R\sqrt{3}$. I là điểm thuộc đoạn SO với $SI = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, M là điểm thuộc (C).

a) Tính tỉ số $\dfrac{SH}{SM}$ với H là hình chiếu của I lên SM. Suy ra quỹ tích của H khi M di động trên (C).

b) Xác định vị trí của M trên (C) để cho tứ diện HAMB có thể tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này.

**Giải**



a) Ta có $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}.R\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$

Tứ giác OMHI nội tiếp trong một đường tròn nên: $SH.SM = SI.SO$. Suy ra

$$\frac{SH}{SM} = \frac{SI.SO}{SM^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.R\sqrt{3} : SM^2 = \frac{2R^2}{SM^2}$$

Mà $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 3R^2 + R^2 = 4R^2$

Vậy $\dfrac{SH}{SM} = \dfrac{SI.SO}{SM^2} = \dfrac{2R^2}{SM^2} = \dfrac{1}{2}$

Gọi O' là trung điểm của SO thì $O'H \parallel OM \subset mp(P)$.

Do đó $O'H \parallel mp(P)$ nên $O'H \subset mp(\alpha)$ qua O' và $mp(\alpha) \parallel mp(P)$.

Ngoài ra $O'H = \dfrac{R}{2}$

Vậy quỹ tích của H là đường tròn tâm O', bán kính O'H nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua O' và song song với mặt phẳng (P).

b) Gọi V là thể tích của tứ diện HAMB thì: $V = \dfrac{1}{3}.S_{AMB}.OO'$.

Trong đó OO' là khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) và

ABC

$OO' = \frac{SO}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ nên: $V_{HAMB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow S_{AMB}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow$ khoảng cách từ M đến AB lớn nhất.

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của cung AB.

Vậy giá trị lớn nhất của V là:

$$V_{max} = \frac{1}{6}.2R.R\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^3\sqrt{3}}{6}.$$

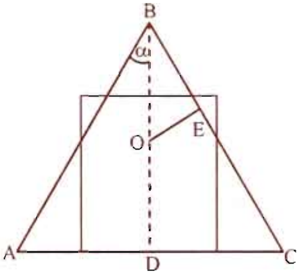
**Ví dụ 13**: Cho một hình cầu nội tiếp trong một hình nón tròn xoay. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi $V_1$, $V_2$ lần lượt là thể tích của hình nón và của hình trụ.

a) Chứng minh rằng $V_1 \neq V_2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

**Giải**

a) Giả sử hình nón có đường cao BH = h, bán kính đáy là DC = a, góc giữa đường sinh và trục là α; bán kính hình cầu nội tiếp hình nón là r.



Ta có: $V_1 = \frac{\pi ha^2}{3}$

với $h = OB + OD = \frac{r}{\sin\alpha} + r = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$.

$a = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\tan\alpha$

Do đó $V_1 = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{\pi.r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$

Thể tích hình trụ ngoại tiếp hình cầu là $V_2 = 2\pi.r^3$

Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{(1+s)^2}{6s(1-s)}$ với $s = \sin\alpha, 0 < s < 1$

Giả sử: $V_1 = V_2 \Leftrightarrow 7s^2 - 4s + 1 = 0$.

Phương trình bậc hai theo s vô nghiệm $\Rightarrow$ đpcm.

b) Đặt $\frac{V_1}{V_2} = k$ ta có phương trình:

$(1 + 6k)s^2 + 2(1 - 3k)s + 1 = 0$ để phương trình này có nghiệm, ta phải có:

$\Delta' = (1 - 3)k^2 - (1 + 6k) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{4}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$ ứng với $s = \sin\alpha = \frac{1}{3}$ và OB = 3r.

ABC

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Cho hình nón đỉnh S, bán kính đáy R, góc ở đỉnh hình nón là $2\alpha$, $45^0 < \alpha < 90^0$

1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.
2) Tính diện tích thiết diện do mp(P) cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc với nhau.

**ĐS:** 1) $S_{xq} = \dfrac{\pi R^2}{\sin\alpha}$, $V = \pi R^3.\cot\alpha$ 2) $S_1 = \dfrac{R^2}{2\sin^2\alpha}$

**Bài 2**: Cho hình nón có thể tích là $96\pi$, tỉ số giữa đường cao và đường sinh là $\dfrac{4}{5}$ Tính diện tích xung quanh của hình nón.

**ĐS:** $S_{xq} = \pi Rd = 60\pi$.

**Bài 3:** Cho tam giác đều ABC cạnh a và (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi (C) là đường tròn đường kính BC và nằm trong mp(P)

1) Tính bán kính mặt cầu đi qua đường tròn (C) và điểm A.
2) Xét hình nón ngoại tiếp mặt cầu nói trên sao cho các tiếp điểm giữa hình nón và mặt cầu là đường tròn (C). Tính thể tích của khối nón.

**ĐS:** 1) $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ 2) $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

**Bài 4**: Cho hình nón S, góc giữa đường sinh d và mặt đáy là $\alpha$. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S, hợp với mặt đáy góc $60^0$ Tính diện tích thiết diện và khoảng cách từ O đến mp(P)

**ĐS:** $S_{SAB} = \dfrac{2d^2\sin\alpha}{3}\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$, $d(O,(P)) = \dfrac{d.\sin\alpha}{2}$

**Bài 5**: Cho hình nón đỉnh S đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0$ $\widehat{SAB} = 60^0$ Tính thể tích, diện tích xung quanh hình tròn.

**ĐS:** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$, $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{3}$.

**Bài 6**: Tìm hình nón có thể tích lớn nhất biết diện tích toàn phần của nó bằng diện tích hình tròn bán kính a cho trước.

**HD:** dùng bất đẳng thức Côsi.

**Bài 7:** Một hình nón có bán kính đáy R và chiều cao bằng 4R. Tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp hình nón để diện tích toàn phần của hình trụ đạt giá trị lớn nhất.

**ĐS:** $S_{tp}$ đạt giá trị lớn nhất khi $r = \dfrac{2}{3}R$ và $h = \dfrac{4R}{3}$

**Bài 8**: Cho hình nón có đỉnh S đáy là hình tròn (O). Trên đường tròn đáy lấy một điểm A cố định và điểm M di động. Biết $\widehat{AOM} = \alpha$, (SAM) tạo với mặt đáy hình nón một góc $\beta$ và khoảng cách từ O đến (SAM) bằng a.

ABC

Tính thể tích khối nón và chứng minh các hình chiếu của O trên mặt phẳng (SAM) nằm trên một đường tròn cố định.

**ĐS:** $V = \frac{\pi}{3}.\frac{a^3}{\cos^2\frac{\alpha^2}{2}.\sin^2\beta.\cos\beta}$

**Bài 9:** Trong mặt phẳng (P) cho một điểm O cố định. Xét các đường thẳng $l$ thay đổi, qua O sao cho góc giữa $l$ và mp(P) bằng $\alpha$ không đổi. Chứng minh $l$ luôn luôn nằm trên một mặt nón tròn xoay.

**HD:** trục là đường thẳng qua O vuông góc với (P).

**Bài 10:** Cho hai điểm A, B cố định, một đường thẳng $l$ thay đổi luôn luôn đi qua A và cách B một đoạn không đổi d ($d < AB$). Chứng minh $l$ luôn nằm trên một mặt nón.

**HD:** $BH \perp l$ thì góc BAH không đổi.

**Bài 11:** Chứng minh trong một mặt nón, góc ở đỉnh lớn hơn hay bằng bất cứ góc nào do hai đường sinh tạo nên.

**HD:** dùng đường cao của tam giác tạo bởi 2 đường sinh.

**Bài 12:** Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Tính $S_{xq}$, $S_{tp}$ và tính V

**ĐS:** $V = \frac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$

**Bài 13:** Cho hình nón có đường kính đáy bằng R, đường sinh bằng 3R. Tính diện tích thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60^0$

**HD:** thiết diện là tam giác cân tạo bởi 2 đường sinh.

**Bài 14:** Hình nón có bán kính đáy là r và góc ở đỉnh bằng $120^0$. Tính thể tích khối nón và diện tích của thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau.

**HD:** đường sinh $\frac{2r}{\sqrt{3}}$

**Bài 15:** Chiều cao của hình nón bằng 20, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh, cách tâm của đáy 12. Tính diện tích thiết diện và góc hợp bởi thiết diện với đáy.

**ĐS:** $S = 500$.

**Bài 16:** Cho hình chóp tứ giác đều có đường cao h, góc ở đáy của mặt bên là $\alpha$, ($\alpha > 45^0$). Tính diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp theo h và $\alpha$.

**HD:** lập phương trình theo x bán kính đáy hình nón

**Bài 17:** Hiệu giữa hai đường sinh và bán kính đáy của một hình nón là a. Góc xen giữa đường sinh và mặt đáy là $\alpha$. Tính diện tích mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trong hình nón.

**HD:** $r = a.\cot\alpha$.

**Bài 18:** Cho một khối nón đỉnh S, đường cao $SO = 10$, bán kính đáy $R = 4$; M là một điểm trên đoạn OS, đặt $OM = x$, $0 < x < 10$. Gọi (C) là đường tròn giao tuyến khi cắt khối nón bởi mặt phẳng đi qua M và vuông góc với OS. Tính thể tích lớn nhất của khối nón đỉnh O mà đáy là (C).

**HD:** dùng bất đẳng thức Côsi hoặc đạo hàm.

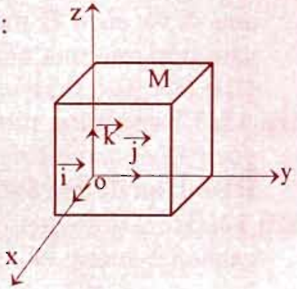
# Chương III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

## §1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**Toạ độ trong không gian**

Ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trên 3 trục Ox, Oy, Oz :



$\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$

M(x, y, z) hay M = (x, y, z):

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

$\vec{a}(x, y, z)$ hay $\vec{a} = (x, y, z)$:

$\vec{a} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

- Hai vectơ: $\vec{u} = (x, y, z)$ và $\vec{v} = (x', y', z')$ thì:

$\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y'; z \pm z')$ ; $k\vec{u} = (kx; ky, kz)$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ ; $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- Hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$ thì:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

M chia AB theo tỉ số $k \neq 1$: $M\left(\frac{x_1 - kx_2}{1-k}; \frac{y_1 - ky_2}{1-k}; \frac{z_1 - kz_2}{1-k}\right)$

**Tích có hướng**: của $\vec{a} = (x, y, z)$ và $\vec{b} = (x', y', z')$ là vectơ:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right)$$

- **Kết quả:**

– Vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với $\vec{a}$, $\vec{b}$

– Độ dài của vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$: $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$

– 2 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

– 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$

– 3 vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng: $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} \neq 0$

**Diện tích và thể tích**

Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

Thể tích hình lăng trụ ABC.A'B'C': $V = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

**Phương trình mặt cầu:**

Mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ hay:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$

có tâm I(–A, –B, –C) và bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

Chú ý: - Tâm đường tròn I ngoại tiếp tam giác ABC trong không gian:

$$\begin{cases} IA = IB = IC \\ I \in (ABC) \end{cases}$$

Tâm K mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD: KA = KB = KC = KD.

## DẠNG 1: TOẠ ĐỘ ĐIỂM, VECTƠ

Ba vectơ đơn vị trên 3 trục Ox, Oy, Oz :

$\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$

- Hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$ thì:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

- Điểm M chia AB theo tỉ k ≠ 1: $M\left(\frac{x_1 - kx_2}{1 - k}; \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}; \frac{z_1 - kz_2}{1 - k}\right)$

- Toạ độ trung điểm M của đoạn AB, trọng tâm G của tam giác ABC, trọng tâm E của tứ diện ABCD với tọa độ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ $D(x_4\ y_4, z_4)$:

$$M\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases} \qquad G\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{cases} \qquad E\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \end{cases}$$

- Phép toán của hai vectơ: $\vec{u} = (x, y, z)$ và $\vec{v} = (x', y'\ z')$ thì:

$\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y'; z + z')$ $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y'; z - z')$

$k\vec{u} = (kx; ky, kz)$, $u.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ ;

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

- Quan hệ các vectơ

Vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với $\vec{a}$, $\vec{b}$

Vectơ $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a}$

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

Ba 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] . \vec{c} = 0$

Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] . \overrightarrow{AD} = 0$

Ba 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] . \vec{c} \neq 0$

Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] . \overrightarrow{AD} \neq 0$.

**Chú ý:** Ứng dụng tọa độ trong không gian để giải các bài toán hình không gian cổ điển, quan hệ song song, vuông góc, độ dài, góc, khoảng cách, vị trí tương đối,…

**Ví dụ 1**: Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{f} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

**Giải**

a) $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (2 - 0 - 2; -5 - 8 - 14; 3 + 4 - 4) = (0; -27; 3)$

b) $\vec{f} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = (8 + 0 + 3; -20 - \frac{2}{3} + 21; 12 + \frac{1}{3} + 6) = (11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3})$.

**Ví dụ 2:** Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{m}$ cho biết:

a) $\vec{a} + \overrightarrow{m} = 4\vec{a}$ và $\vec{a} = (0; -2; 1)$.

b) $\vec{a} + 2\overrightarrow{m} = \vec{b}$ và $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$.

**Giải**

a) $\vec{a} + \overrightarrow{m} = 4\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{m} = 3\vec{a} = (0; -6; 3)$

b) $\vec{a} + 2\overrightarrow{m} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{m} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right)$.

**Ví dụ 3:** Cho hai bộ ba điểm: A(1; 3; 1) . B(0; 1; 2), C(0; 0; 1) và A'(1; 1; 1;), B'(–4; 3; 1), C'(–9; 5; 1). Hỏi bộ ba điểm nào thẳng hàng?

**Giải**

Ta có $\overrightarrow{CA} = (1; 3; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (0; 1; 1)$

Vì các toạ độ không tương xứng tỉ lệ nên không có số k nào để $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$, suy ra A, B, C không thẳng hàng.

Ta có $\overrightarrow{C'A'} = (10; -4; 0)$, $\overrightarrow{C'B'} = (5; -2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{C'A'} = 2\,\overrightarrow{C'B'}$

Do đó A', B', C' thẳng hàng.

ABC

**Ví dụ 4:** Tính tích vô hướng của hai vectơ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (3; 0; -8)$, $\vec{b} = (2; -7; 0)$.

b) $\vec{a} = (1; -5; 2)$, $\vec{b} = (4; 3; -5)$.

c) $\vec{a} = (0; \sqrt{2}; \sqrt{3})$, $\vec{b} = (4; \sqrt{3}; -\sqrt{2})$.

**Giải**

a) $\vec{a}.\vec{b} = 3.2 + 0.(-7) + (-8).0 = 6$

b) $\vec{a}.\vec{b} = 1.4 + (-5).3 + 2(-5) = -21$

c) $\vec{a}.\vec{b} = 0.4 + \sqrt{2}.\sqrt{3} + \sqrt{3}(-\sqrt{2}) = 0$.

**Ví dụ 5:** Cho ba vectơ: $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (4; 0; -1)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$. Tính:

a) $(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$, $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})$.

b) $\vec{a}^2\vec{b} + \vec{b}^2\vec{c} + \vec{c}^2\vec{a}$, $4\vec{a}.\vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$

**Giải**

a) Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 1.4 + (-1).0 + 1.(-1) = 3$

Do đó: $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = 3\vec{c} = (9; 6; -3)$

Ta có $\vec{b}.\vec{c} = 4.3 + 0.2 + (-1)(-1) = 13$

Do đó $\vec{a}(\vec{b}.\vec{c}) = 13\vec{a} = (13; -13; 13)$

b) Ta có $\vec{a}^2 = 3$, $\vec{b}^2 = 17$, $\vec{c}^2 = 14$ nên

$\vec{a}^2.\vec{b} + \vec{b}^2.\vec{c} + \vec{c}^2.\vec{a} = 3\vec{b} + 17\vec{c} + 14\vec{a} = (77; 20; -6)$ và $\vec{a}.\vec{c} = 0$

$\Rightarrow 4\vec{a}.\vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2 = -53$.

**Ví dụ 6**: Cho $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$ Tìm k để vectơ $\vec{p} = k\vec{u} + 17\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q} = 3\vec{u} - \vec{v}$

**Giải**

Ta có $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Do đó $\vec{p} \perp \vec{q} \Leftrightarrow \vec{p}.\vec{q} = 0 \Leftrightarrow (k\vec{u} + 17\vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow 3k\vec{u}^2 - 17\vec{v}^2 + (51 - k)\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 3k.4 - 17.25 + (51 - k)2.5\frac{-1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 17k - 680 = 0 \Leftrightarrow k = 40$.

**Ví dụ 7:** Cho ba điểm A(2; 0; 4), B(4; $\sqrt{3}$; 5) và C(sin5t; cos3t; sin3t). Tìm t để AB vuông góc với OC.

**Giải**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; \sqrt{3}; 1)$, $\overrightarrow{OC} = (\sin5t; \cos3t; \sin3t)$

Hai đường thẳng AB và OC vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 2\sin5t + \sqrt{3}\cos3t + \sin3t = 0$.

$\Leftrightarrow \sin5t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos3t + \frac{1}{2}\sin3t = 0 \Leftrightarrow \sin5t + \sin(3t + \frac{\pi}{3}) = 0$

ABC

$\Leftrightarrow \sin 5t = \sin(-3t - \frac{\pi}{3})$

Vậy $t = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$. $t = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

**Ví dụ 8:** Xét sự đồng phẳng của ba vectơ

a) $\vec{a} = (-3; 1; -2)$ $\vec{b} = (1; 1; 1)$, $\vec{c} = (-2; 2; 1)$.

b) $\vec{a} = (4; 3; 4)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$, $\vec{c} = (1; 2; 1)$.

**Giải**

a) Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3; 1; -4)$

Do đó $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = -6 + 2 - 4 = -8 \neq 0$

Vậy 3 vectơ không đồng phẳng

b) Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (10; 0; -10) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$

Vậy 3 vectơ đồng phẳng

**Ví dụ 9**: Cho $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$, $\vec{c} = (4; 2; 3)$ và $\vec{d} = (2; 7; 7)$.

a) Chứng minh các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

b) Hãy biểu thị vectơ $\vec{d}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

**Giải**

a) Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-3; -2; 1) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -13 \neq 0$

Vậy 3 vectơ không đồng phẳng.

b) Giả sử $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 4p = 2 \\ -m + n + 2p = 7 \\ m + 2n + 3p = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 3 \\ p = 1 \end{cases}$$

Vậy $\vec{d} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

**Ví dụ 10**: Trong không gian cho bốn điểm:

A(0; 0; 3), B(1; 1; 5), C(−3; 0; 0), D(0; −3; 0)

a) Tính $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}^2.\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

**Giải**

a) $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2)$, $\overrightarrow{BC}\ (-4; -1; -5)$, $\overrightarrow{CA} = (3; 0; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (3; -3; 0)$

Do đó $\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{BC} = -15$, $\overrightarrow{CD}^2 = 18$

nên $(\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}^2\ \overrightarrow{AB} = -15\overrightarrow{CA} + 18\overrightarrow{AB} = (-27; 18; -9)$

b) $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AC}] = (-3; -3; 3)$

Và $\overrightarrow{AD} = (0; -3; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD} = 0$: đpcm.

**Ví dụ 11**: Chứng minh các tính chất sau đây của tích vô hướng

a) $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$ b) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

c) $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, k\vec{b}]$

ABC

### Giải

a) $$[\vec{a}, \vec{a}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right) = (0; 0; 0) = \vec{0}$$

b) $$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1 \; ; \; z_1x_2 - z_2x_1 \; ; \; x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$= -(y_2z_1 - y_1z_2 \; ; \; z_2x_1 - z_1x_2 \; ; \; x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -[\vec{b}, \vec{a}]$$

Kết quả $[\vec{a}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{a}] \Rightarrow [\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$

c) $$k[\vec{a}, \vec{b}] = \left(k\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, k\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} ky_1 & kz_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} kz_1 & kx_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} kx_1 & ky_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= [k\vec{a}, \vec{b}].$$

Tương tự: $k[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, k\vec{b}]$

**Ví dụ 12**: Chứng minh các tính chất sau đây của tích vô hướng

a) $[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$.

b) $\vec{a}\,[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c}$.

c) $\left|[\vec{a}.\vec{b}]\right|^2 = |\vec{a}|^2 . |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$

### Giải

a) $$[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 + z_2 & x_1 + x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$$

b) $$\vec{a}.[\vec{b}.\vec{c}] = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= [\vec{a}.\vec{b}]\vec{c}$$

ABC

c) $VP = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2.\cos^2\alpha$
$= |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2(1 - \cos^2\alpha) = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\sin^2\alpha$
$= |[\vec{a}.\vec{b}]|^2 = VT.$

**Ví dụ 13**: Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ từng đôi không cùng phương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để vectơ tổng:
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$

**Giải**

Từ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow [\vec{a}, -\vec{b} - \vec{c}] = \vec{0}$

Do đó $[\vec{a}, -\vec{b} - \vec{c}] = [\vec{a}, -\vec{b}] - [\vec{a}, \vec{c}] = \vec{0} \Rightarrow [\vec{c}, \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}]$

Tương tự ta cũng có $[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}]$

Vậy: $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

Ngược lại, từ $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] \Rightarrow [\vec{b}, a + \vec{c}] = \vec{0}$

Mặt khác, $[\vec{b}, \vec{b}] = \vec{0} \Rightarrow [\vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \vec{0} \Rightarrow \vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $a + \vec{b} + \vec{c}$.

Nhưng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, vậy $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

**Ví dụ 14**: Cho điểm M(a; b; c)

a) Tìm toạ độ hình chiếu của M trên các mặt phẳng toạ độ và trên các trục toạ độ.

b) Tìm khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng toạ độ, đến các trục toạ độ.

**Giải**

a) Gọi $M_1(x; y; 0)$ là hình chiếu của điểm M(a; b; c) trên mp(Oxy) thì: $\overrightarrow{MM_1} = (x - a; y - b; -c)$ Vì $\overrightarrow{MM_1}.\vec{i} = 0$ và $\overrightarrow{MM_1}.\vec{j} = 0$ nên $x - a = 0$, $y - b = 0$.

Vậy $M_1(a; b; 0)$

Tương tự, hình chiếu của M trên mp(Oyz) là $M_2(0; b; c)$ hình chiếu của M trên mp(Oxz) là $M_3(a; 0; c)$

Giả sử $M_x(x; 0; 0)$ là hình chiếu của M(a; b; c) trên trục Ox thì $\overrightarrow{MM_x} = (x - a; -b; -c)$. Vì $\overrightarrow{MM_x}.\vec{i} = 0$ nên $x = a$, do đó $M_x(a; 0; 0)$

Tương tự, hình chiếu của M(a; b; c) trên trục Oy là $M_y(0; b; 0)$, hình chiếu của M(a; b; c) trên trục Oz là $M_z(0; 0; c)$.

b) $d(M; (Oxy)) = MM_1 = \sqrt{(a-a)^2 + (b-b)^2 + (c-0)^2} = |c|$

Tương tự $d(M; (Oyz)) = |a|$, $d(M; (Ozx)) = |b|$

Ta có $d(M; Ox) = MM_x = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Tương tự $d(M; Oy) = \sqrt{a^2 + c^2}$ . $d(M; Oz) = \sqrt{a^2 + b^2}$

ABC

**Ví dụ 15**: Cho hai điểm $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$. Tìm toạ độ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$.

**Giải**

Với điểm $M(x; y; z)$ ta có: $\overrightarrow{MA} = (x_1 - x; y_1 - y; z_1 - z)$,

$\overrightarrow{MB} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)$

Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x = k(x_2 - x) \\ y_1 - y = k(y_2 - y) \\ z_1 - z = k(z_2 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1 - k} \end{cases}$$

**Ví dụ 16:** Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; 2; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $C(-2; 3; -1)$.

a) Gọi $(x; y; z)$ là các toạ độ của điểm M nằm trên mặt phẳng (ABC). Tìm sự liên hệ giữa x, y, z.

b) Tìm toạ độ của điểm D biết rằng hình ABCD là hình bình hành.

**Giải**

a) $\overrightarrow{AB} = (1; -3; -4)$, $\overrightarrow{AC}\ (-3; 1; -5)$, $\overrightarrow{AM} = (x - 1; y - 2; z - 4)$

Ta có M nằm trên mặt phẳng (ABC) $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow 19(x - 1) + 17(y - 2) - 8(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 19x + 17y - 8z - 21 = 0.$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:

$$\begin{cases} 1 = -2 - x_D \\ -3 = 3 - y_D \\ -4 = -1 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 6 \\ z_D = 3 \end{cases}$$ Vậy $D(-3; 6; 3)$.

**Ví dụ 17:** Cho $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$, $C(-10; 5; 3)$

a) Chứng minh rằng: A, B, C là ba đỉnh của một tam giác

b) Tìm chân đường phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC.

**Giải**

a) $\overrightarrow{BA} = (-2; -1; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-14; 5; 2)$

Ta có $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương nên A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi BE là đường phân giác ngoài của góc B, khi đó:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Vì 2 vectơ $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$ cùng hướng nên E chia đoạn AC theo tỉ $k = \dfrac{1}{5}$

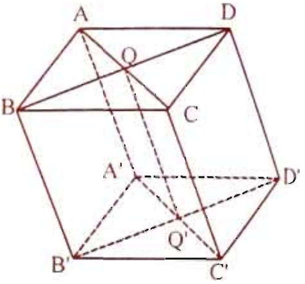
$\Rightarrow E(5; -\dfrac{5}{2}; 3)$

ABC

**Ví dụ 18**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' biết $A(x_1; y_1; z_1)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $B'(x'_2; y'_2; z'_2)$, $D'(x'_4; y'_4; z'_4)$. Tìm toạ độ của các đỉnh còn lại.

**Giải**

Gọi $Q = AC \cap BD$, $Q' = A'C' \cap B'D'$ thì Q, Q' là trung điểm của AC, B'D' nên:



$$Q\left(\frac{x_1+x_3}{2}; \frac{y_1+y_3}{2}; \frac{z_1+z_3}{2}\right),$$

$$Q'\left(\frac{x'_2+x'_4}{2}; \frac{y'_2+y'_4}{2}; \frac{z'_2+z'_4}{2}\right)$$

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{QQ'}$, suy ra

$$A'\left(\frac{x_1+x'_2+x'_4-x_3}{2}; \frac{y_1+y'_2+y'_4-y_3}{2}; \frac{z_1+z'_2+z'_4-z_3}{2}\right)$$

$$C'\left(\frac{x'_2+x'_4-x_1+x_3}{2}; \frac{y'_2+y'_4-y_1+y_3}{2}; \frac{z'_2+z'_4-z_1+z_3}{2}\right)$$

$$B\left(\frac{x_1+x_3+x'_2-x'_4}{2}; \frac{y_1+y_3+y'_2-y'_4}{2}; \frac{z_1+z_3+z'_2-z'_4}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{x_1+x_3-x'_2+x'_4}{2}; \frac{y_1+y_3-y'_2+y'_4}{2}; \frac{z_1+z_3-z'_2+z'_4}{2}\right).$$

**Ví dụ 19:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các điểm A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; –1; 1) và C'(4; 5; –5). Tìm các điểm còn lại.

**Giải**

Ta có ABCD là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 2 = 0 \\ y_C - 1 = -1 \\ z_C - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}$$ Do đó: C(2; 0; 2)

Và $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = (2; 5; -7)$

Nên A'(3; 5; –6), B'(4; 6; –5), D'(3; 4; –6).

**Ví dụ 20**:

a) Tìm toạ độ điểm M thuộc trục Ox sao cho M cách đều hai điểm A(1; 2; 3) và B(–3; –3; 2)

b) Trên mặt phẳng (Oxz) thì điểm M cách đều ba điểm A(1; 1; 1), B(–1; 1; 0), C(3; 1; –1).

**Giải**

a) M thuộc Ox nên M(x; 0; 0). Ta có $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + 2^2 + 3^2 = (-3 - x)^2 + (-3)^2 + 2^2 \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy M(–1; 0; 0)

b) M thuộc (Oxz) trên M(x; 0; z). Ta có: MA = MB = MC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 1 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + 1 + z^2 \\ (x-1)^2 + 1 + (z-1)^2 = (x-3)^2 + 1 + (z+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+2z=1\\4x-4z=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{5}{6}\\z=-\dfrac{7}{6}\end{cases}\quad \text{Vậy } M\left(\frac{5}{6};0;-\frac{7}{6}\right).$$

**Ví dụ 21**: Cho tam giác ABC có A(−2; 1; 0), B(0; 3; −1), C(−1; 0; 2).

a) Chứng minh tam giác ABC có góc B nhọn.

b) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu của A trên cạnh BC.

**Giải**

a) Ta có $\overline{BA}=(-2;-2;1)$, $\overline{BC}=(-1;-3;3)$

Nên $\cos B=\dfrac{\overline{BA}.\overline{BC}}{|\overline{BA}|.|\overline{BC}|}=\dfrac{11}{3\sqrt{19}}>0 \Rightarrow$ góc B nhọn.

b) H(x; y; z) thuộc BC nên $\overline{BH}=t\overline{BC}$

Do đó x = −t, y − 3 = −3t, z + 1 = 3t

⇒ x = −t, y = 3 − 3t, z = −1 + 3t

Ta có AH ⊥ BC nên $\overline{AH}.\overline{BC}=0$.

$(-t+2)(-1)+(-3t+2)(-3)+(-1+3t).3=0 \Rightarrow t=\dfrac{11}{9}$

Vậy hình chiếu $H\left(-\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

**Ví dụ 22**: Cho bốn điểm A(−3; 5; 15), B(0; 0; 7), C(2; −1; 4), D(4; −3; 0). Hỏi hai đường thẳng AB và CD có cắt nhau hay không? Nếu chúng cắt nhau, hãy tìm toạ độ giao điểm.

**Giải**

Ta có: $\overline{AB}=(3;-5;-8)$, $\overline{AC}=(5;-6;-11)$

$\overline{AD}=(7;-8;-15)$, $\overline{CD}=(2;-2;-4)$

Do đó $[\overline{AB},\overline{AC}]=(7;-7;7)\Rightarrow[\overline{AB}\ \overline{AC}]\ \overline{AD}=0$ nên AB, CD đồng phẳng, hơn nữa $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ không cùng phương, do đó 2 đường thẳng AB và CD cắt nhau.

Gọi $M(x_M;y_M,z_M)$ là giao điểm của AB và CD.

Đặt $\overline{MA}=k\overline{MB}$, $\overline{MC}=k'\overline{MD}$ Ta có:

$$x_M=\frac{x_A-kx_B}{1-k}=\frac{x_C-k'x_D}{1-k'}\Leftrightarrow\frac{-3}{1-k}=\frac{2-4k'}{1-k'}$$

$$y_M=\frac{y_A-ky_B}{1-k}=\frac{y_C-k'y_D}{1-k'}\Leftrightarrow\frac{5}{1-k}=\frac{-1+3k'}{1-k'}$$

$$z_M=\frac{z_A-kz_B}{1-k}=\frac{y_C-k'z_D}{1-k'}\Leftrightarrow\frac{15-7k}{1-k}=\frac{4}{1-k'}$$

Giải ra được $k'=\dfrac{7}{11}$ nên $M\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{5}{2};11\right)$.

ABC

**Ví dụ 23:**

a) Cho hai điểm A(2; 5; 3), B(3; 7; 4). Tìm điểm C(x; y; 6) để A, B, C thẳng hàng.

b) Cho hai điểm A(−1; 6; 6), B(3; −6; −2). Tìm điểm M thuộc mp(Oxy) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

**Giải**

a) A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k \\ y - 5 = 2k \\ 3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 11 \\ k = 3 \end{cases}.$$ Vậy điểm C(5; 11; 6).

b) Vì $z_A = 6$, $z_B = -2 \Rightarrow z_A \,.\, z_B < 0 \Rightarrow$ A, B ở hai phía của mp(Oxy).

Vậy MA + MB nhỏ nhất khi A, B, M thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] = \vec{0}$

Gọi M(x; y; 0) ∈ mp(Oxy)

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x + 1; y - 6; -6)$, $\overrightarrow{AB} = (4; -12; -8)$

Ta có: $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] = (-8y - 24\ ; 8x - 16; -12x - 4y + 12) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8y - 24 = 0 \\ 8x - 16 = 0 \\ -12x - 4y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy MA + MB ngắn nhất khi M(2; −3; 0)

**Ví dụ 24:** Cho tứ diện ABCD có: A(2; 1; −1), B(3; 0; 1), C(2; −1; 3) và D thuộc trục Oy. Biết $V_{ABCD} = 5$. Tìm toạ độ đỉnh D.

**Giải**

Gọi D(0; y; 0) thuộc trục Oy. Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; y - 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -4; -2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD} = -4(y - 1) - 2 = -4y + 2.$

Theo giả thiết $V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD}\right| = 5$

$\Leftrightarrow |-4y + 2| = 30 \Leftrightarrow y = -7; y = 8$

Vậy có 2 điểm D trên trục Oy: (0; −7; 0) và (0; 8; 0).

**Ví dụ 25**: Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD

Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện cũng đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh đó. Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng $\frac{GA}{GA'} = 3$.

**Giải**

Ta giải bằng phương pháp toạ độ.

Trong không gian toạ độ Oxyz, giả sử $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3, z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ thì trọng tâm A' của tam giác BCD, trọng tâm tứ diện G:

$$A'\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3};\frac{y_2+y_3+y_4}{3};\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

Do đó:

$$\overline{GA}=\left(\frac{3x_1-x_2-x_3-x_4}{4};\frac{3y_1-y_2-y_3-y_4}{4};\frac{3z_1-z_2-z_3-z_4}{4}\right)$$

$$\overline{GA}'=\left(\frac{-3x_1+x_2+x_3+x_4}{12};\frac{-3y_1+y_2+y_3+y_4}{12};\frac{-3z_1+z_2+z_3+z_4}{12}\right)$$

Suy ra: $\overline{GA}=-3\,\overline{GA}' \Rightarrow$ G, A, A' thẳng hàng và $\frac{GA}{GA'}=3$.

Tương tự thì có đpcm.

**Ví dụ 26:** Cho tứ diện nội tiếp trong mặt cầu tâm O và có AB = AC = AD. Gọi G là trọng tâm $\Delta ACD$, E, F là trung điểm BG, AE.
Chứng minh: $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

**Giải**

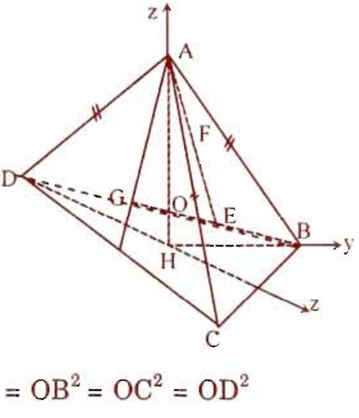
AB = AC = AD và OB = OC = OD

$\Rightarrow OA \perp (BCD)$ tại chân đường cao H với HB = HC = HD.

Chọn H làm gốc toạ độ, với hệ trục Hx, Hy, Hz sao cho HA là trục Hz, HB là trục Hy, HD là trục Hx.

$A(0; 0; a)$, $B(0; b; 0)$; $C(c_1; c_2; 0)$,

$D(d; 0; 0)$ và $O(0; 0; z)$ suy ra



$$G\left(\frac{c_1+d}{3};\frac{c_2}{3};\frac{a}{3}\right),\ E\left(\frac{c_1+d}{6};\frac{b}{2}+\frac{c_2}{6};\frac{a}{6}\right)$$

$$F\left(\frac{c_1+d}{12};\frac{b}{4}+\frac{c_2}{12};\frac{7a}{12}\right)$$

và $\overline{OF}=\left(\frac{c_1+d}{12};\frac{b}{4}+\frac{c_2}{12};\frac{7a}{12}-z\right)$

$$\overline{BG}=\left(\frac{c_1+d_1}{3};\frac{c_2}{3}-b;\ \frac{a}{3}\right)$$

$\overline{AC}=(c_1; c_2; -a)$, $\overline{OD}=(d; 0; -z)$

Theo giả thiết $OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2$

$\Leftrightarrow (a-z)^2 = b^2 + z^2 = c_1^2 + c_2^2 + z^2 = d^2 + z^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2az = b^2 = c_1^2 + c_2^2 = d^2$ (1)

Ta có: $\overline{OF}.\overline{BG} = 0 \Leftrightarrow (c_1+d)^2 + c_2^2 - 9b^2 + 7a^2 - 12az = 0$ (2)

Khai triển (2) và thay thế (1) ta được:

(2) $\Leftrightarrow az + c_1d = 0 \Leftrightarrow \overline{OD}\,.\,\overline{AC} = 0$ : đpcm.

ABC

## DẠNG 2: GÓC, KHOẢNG CÁCH, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

- Độ dài của vectơ: $\vec{u} = (x, y, z)$ : $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Góc giữa hai vectơ: $\vec{u} = (x,y,z)$ và $\vec{v} = (x',y',z')$:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- Góc của tam giác ABC: $\cos A = \cos(\overline{AB}, \overline{AC})$

Chú ý: Góc giữa 2 vectơ từ 0° đến 180° và các góc còn lại giữa đường thẳng, mặt phẳng đều từ 0° đến 90°

Diện tích và thể tích:

Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB}, \overline{AC}]\right|$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{6}\left|[\overline{AB}, \overline{AC}].\overline{AD}\right|$

Thể tích hình hộp ABCD.A′B′C′D′: $V = \left|[\overline{AB}, \overline{AD}].\overline{AA'}\right|$

Thể tích hình lăng trụ ABC.A′B′C′: $V = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB}, \overline{AD}].\overline{AA'}\right|$

**Ví dụ 1**: Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{u} = (1; 1; 1)$; $\vec{v} = (2; 1; -1)$.

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ; $\vec{v} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$.

**Giải**

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' + y.y' + z.z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $\vec{u} = (3; 4; 0)$, $\vec{v} = (0; -2; 3) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-8\sqrt{13}}{65}$

**Ví dụ 2**: Cho các vectơ: $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ; $\vec{v} = 3\vec{i} + 5(\vec{j} - \vec{k})$ ;

$\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k} + 3\vec{j}$

a) Tìm côsin của các góc $(\vec{v}\ \ \vec{i})$, $(\vec{v}\ \ \vec{j})$ và $(\vec{v}\ \ \vec{k})$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}\ \vec{w}$

**Giải**

a) $\vec{u} = (1; -2; 0)$, $\vec{v} = (3; 5; -5)$, $\vec{w} = (2; 3; -1)$

Và các vectơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên

$$\cos(\vec{v},\vec{i}) = \frac{\vec{v}.\vec{i}}{|\vec{v}|.|\vec{i}|} = \frac{3}{\sqrt{59}} \;;\quad \cos(\vec{v},\vec{j}) = \frac{\vec{v}.\vec{j}}{|\vec{v}|.|\vec{j}|} = \frac{5}{\sqrt{59}}$$

$$\cos(\vec{v},\vec{k}) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{|\vec{v}|.|\vec{k}|} = \frac{-5}{\sqrt{59}}.$$

b) Ta có $\vec{u}\,.\,\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z' = -7$.

Tương tự thì được $\vec{u}\ \vec{w} = -4$, $\vec{v}\ \vec{w} = 26$.

**Ví dụ 3:** Cho hình bình hành ABCD với A(–3; –2; 0), B(3; –3; 1), C(5; 0; 2)

Tìm toạ độ đỉnh D và tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

**Giải**

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-6;\ 1;\ -1)$, $\overrightarrow{BC} = (2;\ 3;\ 1)$. Vì toạ độ của hai vectơ đó không tỉ lệ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Gọi D(x; y; z). Tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 2 \\ y + 2 = 3 \\ z \quad\ \ = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ Vậy } D(-1;\ 1;\ 1)$$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (8;\ 2;\ 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-4;\ 4;\ 0)$, do đó:

$$\cos(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}) = \frac{-32 + 8}{\sqrt{72}.\sqrt{32}} = -\frac{1}{2}$$

Vậy $(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}) = 120^o$

**Ví dụ 4**: Cho vectơ $\vec{u}$ tuỳ ý khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng:

$\cos^2(\vec{u},\ \vec{i}\,) + \cos^2(\vec{u},\ \vec{j}\,) + \cos^2(\vec{u},\ \vec{k}\,) = 1.$

**Giải**

Giả sử $\vec{u} = (x;\ y;\ z)$ ta có: $\cos(\vec{u},\vec{i}\,) = \dfrac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}|.|\vec{i}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Do đó $\cos^2(\vec{u},\vec{i}\,) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

Tương tự: $\cos^2(\vec{u},\vec{j}\,) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ ; $\cos^2(\vec{u},\vec{k}\,) = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 5:** Cho tam giác ABC vuông ở A biết A(4; 2; –1), B(3; 0; 2), C(x; –2; 1)

a) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm độ dài đường cao của tam giác ABC vẽ từ đỉnh A.

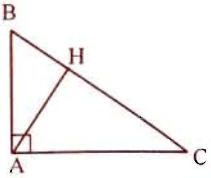
**Giải**

a) Tam giác ABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Mà $AB^2 = 1 + 4 + 9 = 14$, $AC^2 = (x - 4)^2 + 16 + 4 = (x - 4)^2 + 20$

$BC^2 = (x - 3)^2 + 4 + 1 = (x - 3)^2 + 5 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow C(18;\ -2;\ 1)$

Tâm đường tròn ngoại tiếp I là trung điểm của BC.



Nên $I\left(\frac{21}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{230}}{2}$

b) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH nên

$AH.BC = AB.AC$

$\Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{6\sqrt{4830}}{115}$

**Ví dụ 6:** Cho ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1)

a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi, diện tích và độ dài đường cao của tam giác ABC vẽ từ đỉnh A.

c) Tính các góc của tam giác ABC.

**Giải**

a) Ta có $\overline{BA} = (1; 0; -1)$, $\overline{BC} = (2; 1; 0)$, toạ độ hai vectơ đó không tỉ lệ nên chúng không cùng phương. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $\quad BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Vậy chu vi tam giác ABC bằng $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

Vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A do đó diện tích:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.h_A \Rightarrow h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{30}}{5}$

c) Vì tam giác ABC vuông tại A nên:

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

Cách khác: Tính cosB theo công thức:

$$\cos B = \frac{\overline{BC}.\overline{BA}}{BC.BA} = \frac{2.1 + 0 + 0}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

**Ví dụ 7:** Trong không gian toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC có A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5).

a) Tính độ dài đường cao $h_A$ của tam giác vẽ từ đỉnh A.

b) Tính độ dài đường phân giác trong của tam giác vẽ từ đỉnh B.

**Giải**

a) Ta có $\overline{AB} = (1; -3; 4)$ $\quad \overline{AC} = (-5; 5; 6)$, $\overline{BC} = (-6; 8; 2)$

$\Rightarrow [\overline{AB} \quad \overline{AC}] = (-38; -26; -10)$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{555}$

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{555}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{555}}{\sqrt{26}}$$

b) Gọi D(x; y; z) là chân đường phân giác vẽ từ B:

Ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2}$

Vì D nằm giữa A, C nên $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) = x+4 \\ 2(2-y) = y-7 \\ 2(-1-z) = z-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{74}}{3}$

**Ví dụ 8:** Cho hình bình hành ABCD có 3 đỉnh A(3; 0; 4), B(1; 2; 3), C(9; 6; 4).

a) Tính góc B của tam giác ABC

b) Tính diện tích hình bình hành ABCD.

**Giải**

a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (2; -2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (8; 4; 1)$

Ta có $\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

b) Hình bình hành ABCD có diện tích: $S = 2S_{ABC} = 2.\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]\right|$

Ta có $[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = (-6; 6; 24) \Rightarrow S = 18\sqrt{2}$

**Ví dụ 9**: Cho bốn điểm có tọa độ A(2; 5; –4), B(1; 6; 3), C(–4; – 1; 12), D(–2; –3; –2)

a) Chứng minh ABCD là một hình thang.

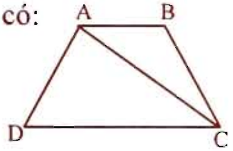
b) Tính diện tích hình thang ABCD.

**Giải**

a) $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 7)$, $\overrightarrow{AC} = (-6; -6; 16)$, hai vectơ này không cùng phương vì toạ độ không tỉ lệ suy ra A, B, C không thẳng hàng và có:

$\overrightarrow{DC} = (-2; 2; 14) = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow AB \parallel CD$.

Vậy ABCD là hình thang



b) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

$$= \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| + \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]\right| = 3\sqrt{1046}$$

**Ví dụ 10**: Cho hai điểm A(2; 0; –1), B(0; –2; 3)

a) Tìm toạ độ điểm C ∈ Oy để tam giác ABC có diện tích bằng $\sqrt{11}$ và thoả mãn OC ≥ 1.

b) Tìm toạ độ điểm D ∈ (Oxz) để ABCD là hình thang có cạnh đáy AB.

**Giải**

a) Gọi $C(0; y; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; -2; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; y; 1)$.

ABC

Ta có: $S_{ABC} = \sqrt{11}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(2+4y)^2+36+(2y+4)^2} = \sqrt{11}$

$\Leftrightarrow 20y^2 + 32y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = -\frac{3}{5}$ (loại)

Vậy C(0; –1; 0)

b) Gọi $D(x; 0; z) \in (Oxz) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-x; -1; -z)$

ABCD là hình thang khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow \frac{-x}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{-z}{4} \Leftrightarrow x = 1, z = -2.$

Vậy D(1; 0; –2)

**Ví dụ 11**: Cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(–2; 1; –2)

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Tính góc giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối của tứ diện đó.

c) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện vẽ từ đỉnh A.

**Giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; -2)$

nên $\left[\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right) = (1; 1; 1)$

Do đó $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -3 + 1 - 2 = -4 \neq 0$, suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng. Vậy A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Ta có $\overrightarrow{CD} = (-2; 1; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -2)$.

Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các cặp đường thẳng: AB và CD, AC và BD, AD và BC thì ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\right| = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$\cos\beta = \left|\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})\right| = \frac{|2+0-2|}{\sqrt{2}.\sqrt{8}} = 0$$

$$\cos\gamma = \left|\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})\right| = \frac{|-1-2|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

c) Thể tích tứ diện ABCD là $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{2}{3}$

Độ dài đường cao vẽ từ đỉnh A là:

$$h_A = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{3V}{\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Ví dụ 12**: Cho tứ diện ABCD có: A(–1; 2; 0), B(0; 1; 1), C(0; 3; 0), D(2; 1; 0)

a) Tính diện tích tam giác ABC và thể tích tứ diện ABCD.

b) Tìm hình chiếu của D lên mặt phẳng (ABC).

### Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (3; -1; 0)$

nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 1; 2) \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Và $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = -4 \Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{2}{3}$.

b) Gọi H(x; y; z) là hình chiếu D trên mặt phẳng (ABC) thì:

$\overrightarrow{AH} = (x + 1; y - 2; z)$, $\overrightarrow{DH} = (x - 2; y - 1; z)$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 3 \\ x - y - 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

**Ví dụ 13:** Trong không gian Oxyz, cho 4 điểm A(1; 0; 3), B(–3; 1; 3), C(1; 5; 1) và M(x; y; 0). Tìm giá trị nhỏ nhất $T = 2\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$

### Giải

Gọi I là trung điểm của BC:

$\Rightarrow I(-1; 3; 2) \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow T = 2(MA + MI)$

$z_A = 3 > 0$ và $z_I = 2 > 0 \Rightarrow$ A và I nằm về cùng 1 phía đối với mp(Oxy) và M(x; y; 0) thuộc mp(Oxy) nên lấy đối xứng I(–1; 3; 2) qua mp(Oxy) thành $J(-1; 3; -2) \Rightarrow MI = MJ \Rightarrow T = 2(MA + MJ) \geq 2AJ = 2\sqrt{38}$

Dấu = xảy ra khi M là giao điểm của đoạn MJ với mp(Oxy) là $M\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{9}{5}; 0\right)$.

Vậy $\min T = 2\sqrt{38}$.

**Ví dụ 14:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của A'D' và B'B.

a) Chứng minh rằng IJ ⊥ AC'. Tính độ dài đoạn thẳng IJ.

b) Chứng minh rằng D'B ⊥ mp(A'C'D), mp(ACB').

c) Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và A'D.

### Giải

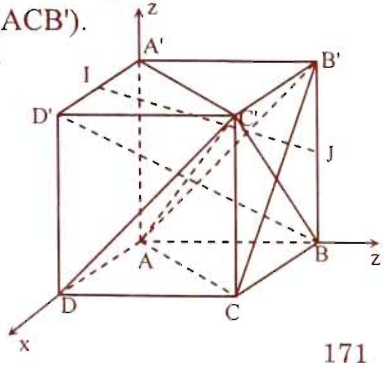
a) Chọn hệ toạ độ Axyz sao cho

A(0; 0; 0), D(a; 0; 0), B(0; a; 0),

A'(0; 0; a). Ta có C' (a; a; a),

B'(0; a; a), D'(a; 0; a) nên:

$I\left(\dfrac{a}{2}; 0; a\right)$; $J\left(0; a; \dfrac{a}{2}\right)$



Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (0 - \frac{a}{2}; a - 0; \frac{a}{2} - a) = (-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2})$

$\overrightarrow{AC'} = (a - 0; a - 0; a - 0) = (a; a; a)$

nên $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC'} = -\frac{a}{2}.a + a.a - \frac{a}{2}.a = -a^2 + a^2 = 0.$

Vậy IJ ⊥ AC'. Đoạn $IJ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

b) Để chứng minh D'B ⊥ mp(A'C'D), ta chứng minh

$\overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'D} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'C'} = 0$, $\overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'D} = 0$

Ta có $\overrightarrow{D'B} = (-a; a; -a)$, $\overrightarrow{A'C'} = (a; a; 0)$; $\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$

Do đó $\overrightarrow{D'B}\overrightarrow{A'C'} = 0$, $\overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'D} = 0$

Tương tự, ta cũng chứng minh được D'B ⊥ mp(ACB')

c) $\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng IJ và A'D thì:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{A'D})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{A'D}\right|}{IJ.A'D} = \left|\frac{-\frac{a}{2}.a + a.0 - \frac{a}{2}(-a)}{\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2}}\right| = 0$$

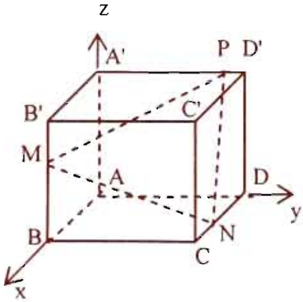
Vậy $\varphi = 90^\circ$

**Ví dụ 15**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Trên các cạnh BB', CD, A'D' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B'M = CN = D'P = ka $(0 < k < 1)$

a) Tính diện tích tam giác MNP theo k và a.

b) Xác định vị trí M trên BB' để diện tích tam giác MNP có giá trị bé nhất.

**Giải:**



Chọn hệ trục toạ độ Axyz như hình vẽ

A(0; 0; 0), B(a; 0; 0)
C(a; a; 0), D(0; a; 0)
A'(0; 0; a), B'(a; 0; a)
C'(a; a; a), D'(0; a; a)

a) $\overrightarrow{B'M} = k\overrightarrow{B'B} \Rightarrow M(a\,; 0; a - ka)$

$\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow N(a - ka; a\,; 0)$

$\overrightarrow{D'P} = k\overrightarrow{D'A'} \Rightarrow P(0; a - ka; a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-ka; a; -a + ka)$, $\overrightarrow{MP} = (-a; a - ka; ka)$ nên:

$[\overrightarrow{MN}\ \ \overrightarrow{MP}] = (k^2a^2 - ka^2 + a^2; k^2a^2 - ka^2 + a^2; k^2a^2 - ka^2 + a^2)$

$S_{MNP} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}]\right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(k^2 - k + 1)$ với $k \in (0; 1)$

ABC

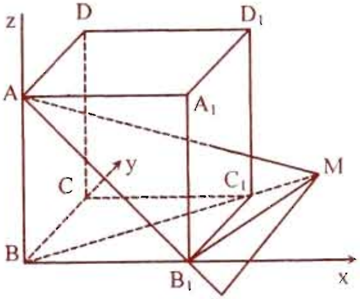
b) Ta có: $k^2 - k + 1 = (k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Dấu = khi $k = \frac{1}{2} \in (0; 1)$ nên $S_{MNP}$ bé nhất khi M là trung điểm BB'.

**Ví dụ 16**: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a, trên $BC_1$ lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng. Tính diện tích S của $\Delta MAB_1$.

**Giải**

Chọn hệ Oxyz sao cho $B \equiv O$, $B_1(a; 0; 0)$, $C_1(a; a; 0)$, $C(0; a; 0)$, $A(0; 0; a)$, $A_1(a; 0; a)$, $D_1(a; a; a)$, $D(0; a; a)$.



Vì $M \in BC_1$ nên gọi $M(x; x; 0)$

Ta có $\overrightarrow{D_1M} = (x - a; x - a; -a)$

$\overrightarrow{DA_1} = (a; -a; 0)$

$\overrightarrow{AB_1} = (a; 0; -a)$

Vì $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng nên

$\left[\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}\right]\overrightarrow{AB_1} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$

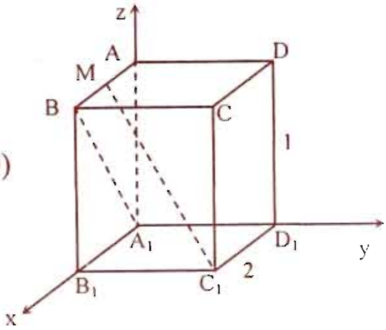
Do đó $M\left(\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2},0\right)$ nên $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3a}{2}.-\frac{3a}{2},a\right)$

$$\overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{a}{2},-\frac{3a}{2},0\right)$$

Vậy: $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{19}}{4}$

**Ví dụ 17**: Lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa cạnh đáy  Điểm M thay đổi trên cạnh AB. Tìm giá trị lớn nhất của góc $\widehat{A_1MC_1}$

**Giải**



Chọn hệ trục như hình vẽ $(A_1xyz)$

Đặt $AM = x$, $0 \leq x \leq 2$.

Ta có: $M(x; 0; 1)$ ; $A_1(0; 0; 0)$; $C_1(2; 2; 0)$

nên $\overrightarrow{MA_1} = (-x; 0; -1)$;

$\overrightarrow{MC_1} = (2 - x; 2; -1)$

Đặt $\alpha = \widehat{A_1MC_1}$ thì:

$$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1})$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}.\sqrt{(2 - x)^2 + 5}} = \frac{(x - 1)^2}{\sqrt{x^2 + 1}.\sqrt{(2 - x)^2 + 5}} \geq 0$$

ABC

Do đó $\alpha \le 90^0$ Vậy góc $\alpha = \widehat{A_1MC_1}$ lớn nhất khi x = 1 tức M trung điểm AB.

**Ví dụ 18:** Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = h, đáy là tam giác ABC vuông tại C, AC = b, BC = a. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.

**Giải**

Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy. Khi đó:

A(0; 0; 0), C(b; 0; 0), B(b; a; 0), S(0; 0; h). M($\frac{b}{2}$; 0; 0)

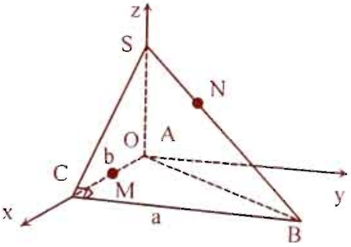
$\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$

Gọi N(x; y; z) thì $\overrightarrow{SN} = (x; y; z - h)$

Từ điều kiện $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ nên

$$x = \frac{b}{3}, y = \frac{a}{3} \text{ và } z - h = \frac{-h}{3}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2h}{3} \Rightarrow N\left(\frac{b}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$$



a) Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right) = \left(-\frac{b}{6}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$

Nên $MN = \sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{a^2}{9} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$

b) MN vuông góc với SB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$$

**Ví dụ 19**: Cho tứ diện SABC có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, SC ⊥ (ABC), tam giác ABC vuông tại A. Các điểm M ∈ SA, N ∈ BC sao cho: AM = CN = t (0 < t < 2a).

a) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất.

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

**Giải**

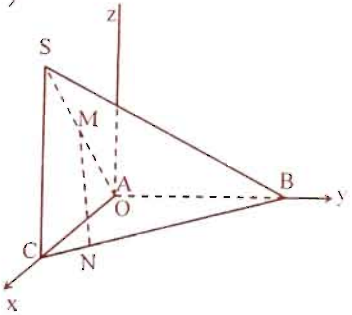
a) Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc toạ độ O ≡ A. Trục Ox chứa AC, trục Oy chứa AB và trục Oz ⊥ (ABC). Khi đó cạnh SC song song với trục Oz và ta có:

A(0; 0; 0) B(0; $a\sqrt{2}$; 0), C($a\sqrt{2}$; 0; 0), S($a\sqrt{2}$; 0; $a\sqrt{2}$)

ABC

$$M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2};0;\frac{t\sqrt{2}}{2}\right);\ N\left(a\sqrt{2}-\frac{t\sqrt{2}}{2};\frac{t\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{MN}=\left(\sqrt{2}(a-t);\frac{t\sqrt{2}}{2};-\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$$



$$\Rightarrow MN=\sqrt{2(a^2-2at+t^2)+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}}$$

$$=\sqrt{3t^2-4at+2a^2}$$

$$=\sqrt{3\left(t-\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{2a^2}{3}}\geq\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t=\frac{2a}{3}$

b) Khi MN ngắn nhất thì: $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};0\ ;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$ và $N\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$

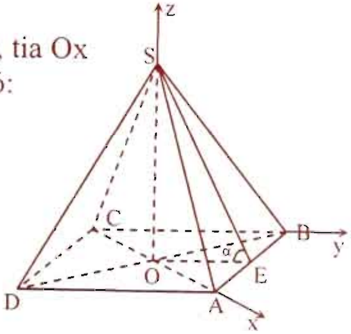
$$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};\ -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right).$$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$

⇒ MN là đường vuông góc chung của SA và BC.

**Ví dụ 20:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy a, mặt bên tạo với đáy góc α. Tìm tanα để SA vuông góc SC.

**Giải**



Chọn hệ trục Oxyz có O là tâm đáy ABCD, tia Ox chứa A, tia Oy chứa B, tia Oz chứa S. Ta có:

$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;0\right)$, $B\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;0\right)$, $D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

và $S\left(0;0;\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

nên $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0\ ;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\ ;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(0;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

Ta có $SA\perp SC$

ABC

$\Leftrightarrow \overline{SA}.\overline{SC}=0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\tan^2\alpha=0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\tan^2\alpha-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha=2 \Leftrightarrow \tan\alpha=\sqrt{2}$

Vậy nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì hai cạnh bên đối diện của hình chóp vuông góc với nhau.

## DẠNG 3: MẶT CẦU

**Phương trình mặt cầu:** (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \text{ hay:}$$

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2-D>0$$

có tâm I(−A, −B, −C) và bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$

**Chú ý:** - Tâm đường tròn I(x; y; z) ngoại tiếp tam giác ABC trong không gian:

$$\begin{cases} IA=IB=IC \\ I\in(ABC) \end{cases}$$

Tâm I(x; y; z) của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là điểm cách đều 4 đỉnh: $IA=IB=IC=ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \\ IA=ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases}$

- Ứng dụng tọa độ trong không gian để giải các bài toán hình không gian cổ điển, quan hệ song song, vuông góc, độ dài, góc , khoảng cách, vị trí tương đối,…

**Ví dụ 1:** Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của mỗi mặt cầu sau đây:

a) $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$.

b) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-3y+15z-2=0$.

b) $9x^2+9y^2+9z^2-6x+18y+1=0$.

d) $x^2+y^2+z^2-x+y-2z+100=0$.

### Giải

a) Ta có: a = −4, b = 1, c = 0, d = 1.

nên $a^2+b^2+c^2-d=16+1-1=16>0$

Mặt cầu (S) có tâm I(−a; −b; −c) nên I(4; −1; 0) và bán kính

$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{16}=4$.

b) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-3y+15z-2=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-y+5z-\frac{2}{3}=0$

Do đó, mặt cầu có tâm $I\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ và có bán kính $R=\frac{7\sqrt{6}}{6}$

c) $9x^2+9y^2+9z^2-6x+18y+1=0$

ABC

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x + 2y + \frac{1}{9} = 0$

Do đó mặt cầu có tâm $I(\frac{1}{3}; -1; 0)$ và có bán kính $R = 1$.

d) Ta có: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -1$, $d = 100$

nên $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 - 100 < 0$

Vậy đó không là phương trình mặt cầu.

**Ví dụ 2**: Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

a) Có tâm $I(5; -3; 7)$ và có bán kính $R = 2$.

b) Có tâm $I(4; -4; 2)$ và đi qua gốc toạ độ

c) Đi qua điểm $A(2; -1; -3)$ và có tâm $I(3; -2; 1)$.

**Giải**

a) Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

nên phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 4.$$

b) Mặt cầu tâm I đi qua gốc toạ độ nên có bán kính

$$R = IO = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6.$$

Vậy phương trình mặt cầu: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 36$.

c) Bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$ nên có phương trình:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 18.$$

**Ví dụ 3**: Lập phương trình mặt cầu:

a) Nhận đoạn AB làm đường kính với $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$.

b) Đi qua ba điểm $A(0; 8; 0)$, $B(4; 6; 2)$, $C(0; 12; 4)$ và có tâm nằm trên mp(Oyz).

**Giải**

a) Mặt cầu nhận AB làm đường kính nên tâm I là trung điểm của AB, do đó $I(1; 1; 1)$ và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 4 + 144} = \sqrt{62}$

Phương trình mặt cầu: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 62$.

hay: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 59 = 0$

b) Tâm I của mặt cầu nằm trên mp(Oyz) nên $I(0; b; c)$.

Ta có $IA = IB = IC$ nên:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8 - b)^2 + c^2 = 4^2 + (6 - b)^2 + (2 - c)^2 \\ (8 - b)^2 + c^2 = (12 - b)^2 + (4 - c)^2 \end{cases}$$

Giải ra được $b = 7$ và $c = 5$.

Vậy $I(0; 7; 5)$, $R = IA = \sqrt{0 + 1 + 25} = \sqrt{26}$

Mặt cầu có phương trình: $x^2 + (y - 7)^2 + (z - 5)^2 = 26$.

ABC

**Ví dụ 4:** Cho $A(0; -2; 1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 0; -1)$. Lập phương trình mặt cầu có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Giải:**

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 2; -2)$, $\overrightarrow{AI} = (x; y+2; z-1)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; -2; -2)$

nên $I \in (ABC) \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z + 1 = 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -3 \\ y - z = -1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{6} \\ y = -\dfrac{5}{6} \\ z = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

nên tâm $I\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$ và bán kính $R = AI = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

Vậy PT mặt cầu là $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{75}{36}$.

**Ví dụ 5**: Lập phương trình mặt cầu:

a) Có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox.

b) Có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz).

**Giải**

a) Vì tâm I của mặt cầu nằm trên tia Ox và mặt cầu tiếp xúc với mp(Oyz) nên điểm tiếp xúc phải là O, do đó bán kính mặt cầu là:
$R = IO = 2$ và $I(2; 0; 0)$.
Mặt cầu có phương trình: $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

b) Vì mặt cầu có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz) nên bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ I tới mp(Oyz), vậy $R = |x_I| = 1$.
Mặt cầu có phương trình: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$

**Ví dụ 6**: Cho $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$, $D(1; 0; 4)$. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

**Giải**

Gọi $I(a ; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 7z = -2 \\ y - 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{11} \\ y = \dfrac{7}{11} \\ z = -\dfrac{4}{11} \end{cases}$$

Do đó $I\left(\frac{6}{11}; \frac{7}{11}; -\frac{4}{11}\right)$ và $R = IA = \sqrt{26}$.

Vậy (S): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$.

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện OABC có A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 4).

a) Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

b) Tính thể tích hình chóp O.ABC.

**Giải**

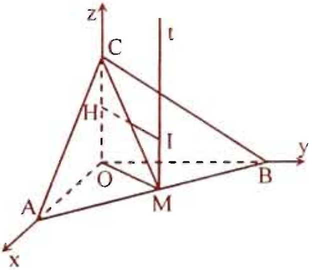
a) Phương trình của mặt cầu (S) cần tìm có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

Ta có (S) qua gốc O(0; 0; 0) nên d = 0.

Vì (S) qua các điểm A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 4) nên ta có:

$$\begin{cases} 4 + 4a = 0 \\ 16 + 8b = 0 \\ 16 + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$



Vậy phương trình của mặt cầu là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0.$$

Cách khác: Ta có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên gọi M là trung điểm AB thì

$$\overline{MI} = \frac{1}{2}\overline{OC}$$

Từ đó suy ra tâm I(1; 2; 2)

b) $V = \frac{1}{3}S_{OAB}\,.\,OC = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{16}{3}$.

**Ví dụ 8**: Lập phương trình các mặt cầu đối xứng của mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 2z - 4 = 0$.

a) Qua mp(xOy)　　　　b) Qua mp(yOz).

**Giải**

Mặt cầu (S) đã cho có tâm I(–2; –4; 1), R = 5.

a) Gọi (S') là mặt cầu đối xứng của (S) qua mp(xOy) thì có tâm I'(–2; –4; –1) và R' = R = 5 nên có phương trình:

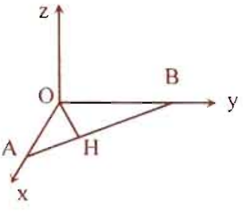
(S'): $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 25$.

b) Gọi (S") là mặt cầu đối xứng của (S) qua mp(yOz) thì (S") có tâm I"(2; –4; 1) và R" = R = 5 nên có phương trình:

(S"): $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 25$.

**Ví dụ 9**: Cho điểm A(3; 0; 0), B(0; 4; 0). Lập phương trình mặt cầu có tâm là hình chiếu H của gốc O lên đường thẳng AB và bán kính R = $\sqrt{1975}$

**Giải**



Ta có A thuộc trục Ox, B thuộc trục Oy.

Trong tam giác AOB: $AO^2 = AH.AB$

$$\Rightarrow AH = \frac{OA^2}{AB} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{OA^2}{AB^2} = \frac{9}{25}$$

Do đó $\overline{AH} = \frac{9}{25}\overline{AB} = \left(-\frac{27}{25};\frac{36}{25};0\right) \Rightarrow H\left(\frac{48}{25};\frac{36}{25};0\right)$

ABC

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: $\left(x - \frac{48}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{36}{25}\right)^2 + z^2 = 1975$.

**Ví dụ 10**: Cho phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha - 4z - (4 + \sin^2\alpha) = 0$.

Tìm α để phương trình trên là phương trình một mặt cầu và tìm α để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất.

**Giải**

Ta có: $a = \cos\alpha$, $b = -\sin\alpha$, $c = -2$, $d = -(4 + \sin^2\alpha)$

$\Rightarrow\ a^2 + b^2 + c^2 - d = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 4 + 4 + \sin^2\alpha = 9 + \sin^2\alpha > \quad \forall\alpha$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi α

Ta có $R = \sqrt{9 + \sin^2\alpha} \geq 3 \Rightarrow R_{\min} = 3$ khi $\alpha = k\pi$, $(k \in Z)$.

**Ví dụ 11**: Cho sáu điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), A'(a'; 0; 0), B'(0; b'; 0), C'(0; 0; c') với $aa' = bb' = cc' \neq 0$; $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$.

a) Chứng minh có một mặt cầu đi qua sáu điểm nói trên.

b) Chứng minh đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và trọng tâm tam giác ABC, vuông góc với mặt phẳng (A'B'C').

**Giải**

Ta xác định tâm và bán kính R của mặt cầu qua 4 điểm A, A', B, C.

Gọi I(x; y; z) là tâm mặt cầu đó, ta có: $IA^2 = IA'^2 = IB^2 = IC^2$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = (x-a')^2 + y^2 + z^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-b)^2 + z^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-c)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax + a^2 = -2a'x + a'^2 \\ -2ax + a^2 = -2by + b^2 \\ -2ax + a^2 = -2cz + c^2 \end{cases}$$

Do đó $x = \frac{a + a}{2} \Rightarrow y = \frac{b^2 + aa}{2b}$ và $z = \frac{c^2 + aa}{2c}$

Tâm $I\left(\frac{a + a'}{2}; \frac{b^2 + aa}{2b}; \frac{c^2 + aa'}{2c}\right)$. Ta có:

$$R^2 = IB^2 = \left(\frac{a + a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{aa' - b^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + aa'}{2c}\right)^2$$

Và $IB'^2 = \left(\frac{a + a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + aa}{2b} - b'\right)^2 + \left(\frac{c^2 + aa'}{2c}\right)^2$

$$= \left(\frac{a + a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2 - aa'}{2b}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + aa'}{2c}\right)^2 \text{ (vì } aa' = bb')$$

$$= IB^2$$

ABC

Tương tự $IC^2 = IC'^2 = IB^2$

Vậy B',C' cũng thuộc mặt cầu nói trên: đpcm.

b) Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overline{OG} = \left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$

Ta có: $\overline{A'B'} = (-a'; b'; 0)$, $\overline{A'C'} = (-a'; 0; c')$

nên $\overline{OG}.\overline{A'B'} = -\frac{aa}{3} + \frac{bb'}{3} + 0 = 0$;

$$\overline{OG}.\overline{A'C'} = -\frac{aa'}{3} + \frac{cc'}{3} + 0 = 0$$

Do đó OG $\perp$ A'B', A'C' $\Rightarrow$ OG $\perp$ mp(A'B'C').

**Ví dụ 12**: Cho bốn điểm A(1; 2; 2), B(−1; 2; −1), C(1; 6; −1), D(−1; 6; 2)

a) Chứng minh ABCD là hình tứ diện và có các cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

c) Viết PT mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

**Giải**

a) Ta có $\overline{AB} = (-2; 0; -3)$, $\overline{CD} = (-2; 0; 3)$, $\overline{BD} = (0; 4; 3)$, $\overline{AC} = (0, 4. -3)$

$\Rightarrow [\overline{AB}, \overline{CD}].\overline{BD} \neq 0$ nên ABCD là tứ diện.

Ta có: $AB = \sqrt{4 + 0 + 9} = CD$, $AC = \sqrt{0 + 16 + 9} = BD$,

$AD = \sqrt{4 + 16 + 0} = BC$.

Vậy tứ diện ABCD có cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Trung điểm của AB là $E(0; 2; \frac{1}{2})$, của CD là $F(0; 6; \frac{1}{2})$

Ta có $\overline{EF} = (0; 4; 0)$ nên $\overline{EF}.\overline{AB} = -2.0 + 0.4 - 3.0 = 0$, $\overline{EF}.\overline{CD} = 0$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Vậy $d(AB, CD) = EF = \sqrt{0 + 16 + 0} = 4$

c) Trung điểm của EF là $I(0; 4; \frac{1}{2})$.

Ta có $IA = IB = IC = ID = \frac{\sqrt{29}}{2}$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCD.

Vậy phương trình $x^2 + (y - 4)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{29}{4}$

**Ví dụ 13:** Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(1; −1; 2), B(1; 3; 2), C(4; 3; 2), D(4; −1; 2).

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng.

b) Gọi A' là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng Oxy. Hãy viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A', B, C, D.

**Giải**

a) Ta có $\overline{AB} = (0; 4; 0)$, $\overline{AC} = (3; 4; 0)$, $\overline{AD} = (3; 0; 0)$

nên $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (0; 0; -12) \Rightarrow [\overline{AB}\ \ \overline{AC}].\overline{AD} = 0$.

Vậy A, B, C, D đồng phẳng.

b) Hình chiếu của A lên mp(Oxy) là A'(1; –1; 0) Gọi phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

(S) qua A', B, C, D nên:

$$\begin{cases} 1 + 1 + 0 + 2a - 2b + 0c + d = 0 \\ 1 + 9 + 4 + 2a + 6b + 4c + d = 0 \\ 16 + 9 + 4 + 8a + 6b + 4c + d = 0 \\ 16 + 1 + 4 + 8a - 2b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{2} \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 2y - 2z + 1 = 0$.

**Ví dụ 14**: Cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z - 14 = 0$.

a) Xét các điểm M(1; –2; 1) và N(–3; –1; 3) điểm nào nằm trong và điểm nào nằm ngoài mặt cầu?

b) Lập phương trình của mặt cầu đối xứng với mặt cầu đã cho qua mặt phẳng (xOz). Hai mặt cầu đó có cắt nhau không?

**Giải**

a) Ta có thể viết phương trình mặt cầu dã cho dưới dạng:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 25.$$

Mặt cầu này có tâm I(1; –3; –1), R = 5.

Ta có IM = $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < R$ nên điểm M ở trong mặt cầu và

IN = $\sqrt{16 + 4 + 16} = 6 > R$ nên điểm N nằm ngoài mặt cầu.

b) Gọi I' là điểm đối xứng của I qua mặt phẳng (xOz) thì điểm I' có toạ độ là (1; 3; –1). Do đó mặt cầu đối xứng với mặt cầu cho trước qua mặt phẳng (xOy) có phương trình là:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25.$$

Hai mặt cầu này có khoảng cách d giữa hai tâm là 6 và ta có d < II' = 10 nên hai mặt cầu đó cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn.

**Ví dụ 15**: Xét vị trí tương đối của 2 mặt cầu:

($S_1$): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + 5 = 0$

($S_2$): $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y - 6z - 1 = 0$

**Giải**

Mặt cầu ($S_1$) có tâm I(2; –3; –1), bán kính R = 3.

Và ($S_2$) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x + 4y - 3z - \dfrac{1}{2} = 0$.

nên có tâm $J(\dfrac{1}{2}; -2; \dfrac{3}{2})$, $r = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Ta có khoảng cách 2 tâm $IJ = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 1 + \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

$$R + r = 3 + \frac{\sqrt{26}}{2}.\ |R - r| = 3 - \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Vì $R + r < IJ < |R - r|$ nên 2 mặt cầu cắt nhau.

ABC

**Ví dụ 16:** Xét vị trí tương đối giữa hai mặt cầu (S) và (S') có phương trình lần lượt là:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ (1)

(S'): $x^2 + y^2 + z^2 + 2a'x + 2b'y + 2c'z + d' = 0$ (2)

**Giải**

Xét hệ phương trình (1), (2). Trừ hai phương trình đó vế với vế ta được hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 & (1) \\ 2(a - a')x + 2(b - b')y + 2(c - c')z + d - d' = 0 & (2') \end{cases}$$

Vì tâm I, I' của (S) và (S') theo thứ tự có toạ độ (–a; –b; –c), (–a'; –b'; –c') và bán kính của (S) và (S') theo thứ tự là:

$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$, $R' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 - d'}$ nên có các trường hợp:

a) $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d' \Leftrightarrow I \equiv I'$, $R = R' \Leftrightarrow (S) \equiv (S')$.

b) $a = a'$ $b = b'$, $c = c'$, $d \neq d' \Leftrightarrow I \equiv I'$, $R \neq R' \Leftrightarrow$ (S) và (S') đồng tâm, $(S) \cap (S') = \varnothing$, tức là hai mặt cầu không có điểm chung.

c) $|a - a'| + |b - b'| + |c - c'| \neq 0 \Leftrightarrow I \neq I' \Leftrightarrow$ (2') là phương trình của một mặt phẳng ($\alpha$) vuông góc với đường thẳng II'.

Vì $(S) \cap (S') = (S) \cap (\alpha)$ nên nếu $(S) \cap (S') = (S) \cap (\alpha) \neq \varnothing$ thì giao đó hoặc là một điểm thuộc đường thẳng II', hoặc là một đường tròn nằm trong mặt phẳng vuông góc với II' (tâm là giao của mặt phẳng đó với II').

**Ví dụ 17**: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0 & (S_1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2a_2x + 2b_2y + 2c_2z + d_2 = 0 & (S_2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi mặt cầu (S) đi qua đường tròn (C) đều có phương trình dạng:

$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 + 2a_2x + 2b_2y + 2c_2z + d_2) = 0$, trong đó $\lambda \neq -\mu$.

**Giải**

Giả sử (S) là mặt cầu bất kì qua đường tròn (C).

Lấy một điểm $M_o(x_o; y_o; z_o) \in (S)$ nhưng $M_o \notin (C)$. Chọn:

$\lambda = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 + 2a_2x_o + 2b_2y_o + 2c_2z_o + d_2$ và

$\mu = -\left(x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 + 2a_1x_o + 2b_1y_o + 2c_1z_o + d_1\right)$

Từ đó được đpcm.

**Ví dụ 18:** Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z = 0$ và hai điểm A(4; 2; 0), B(2; 1; 2). Chứng minh rằng đường thẳng AB và mặt cầu (S) không có điểm chung.

**Giải**

Mặt cầu có tâm I(2; –2; 1) và bán kính R = 3.

ABC

Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2}\left|[\overline{IA}, \overline{IB}]\right| = \frac{1}{2}IH.AB = \frac{\sqrt{89}}{2}$, AB = 3.

Do đó $IH = \frac{2S_{IAB}}{AB} = \frac{\sqrt{89}}{3} > 3 = R$

Vậy đường thẳng AB và mặt cầu (S) không có điểm chung.

**Ví dụ 19**: Cho phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\sin\alpha - 1)x - 2(\sin\alpha + 1)y - 2\cos\alpha.z + 1 = 0$ (1)

($\alpha$ là tham số tuỳ ý).

a) Chứng minh (1) là phương trình của một mặt cầu, xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

b) Tìm bán kính lớn nhất, nhỏ nhất của mặt cầu đó, xác định tâm của các mặt cầu trong các trường hợp đó.

### Giải

a) Ta có $a = -(\sin\alpha - 1)$, $b = -(\sin\alpha + 1)$, $c = -\cos\alpha$ và $d = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = \sin^2\alpha + 2 > 0, \forall\alpha$

Vậy phương trình (1) xác định một mặt cầu tâm I(–a; –b; –c) và bán kính

$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{2 + \sin^2\alpha}$

b) Ta có $0 \le \sin^2\alpha \le 1$ nên:

$R_{max} = \sqrt{3}$ khi $\sin\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$R_{min} = \sqrt{2}$ khi $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$.

Khi $R_{max} = \sqrt{3}$ ta có tâm mặt cầu là: $I_1(0; 2; 0)$ hoặc $I_2(-2; 0; 0)$

Khi $R_{min} = \sqrt{2}$ ta có tâm mặt cầu là: $I_3(-1; 1; 1)$ hoặc $I_4(-1; 1; -1)$.

**Ví dụ 20**: Cho tứ diện với các đỉnh A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6). Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho

$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4$.

### Giải

Gọi M(x; y; z), suy ra:

$\overrightarrow{MA} = (-x + 2; -y; -z)$, $\overrightarrow{MB} = (-x; -y + 4; -z)$,

$\overrightarrow{MC} = (-x; -y; -z + 6)$, $\overrightarrow{MD} = (-x + 2; -y + 4; -z + 6)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (-4x + 4; -4y + 8; -4z + 12)$

Nên $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4 \Leftrightarrow 16.[(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2] = 16$

Vậy tập hợp của M là mặt cầu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$

**Ví dụ 21:** Cho điểm A(1; –1; 2) và B(2; 0; 1). Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = 3$.

### Giải

Gọi M(x; y; z). Ta có: $MA^2 + MB^2 = 3$.

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (2 - z)^2 + (2 - x)^2 + y^2 + (1 - z)^2 = 3$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 3z + 4 = 0$.

ABC

$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4}$

Vậy quỹ tích các điểm M là mặt cầu có tâm $I(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ và bán kính

$R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Ví dụ 22**: Cho bốn điểm A(3; 2; 0), B(−1; 3; 2), C(1; 0; 1), D(0; −1; 3). Tìm tập hợp những điểm M trong không gian thoả mãn từng điều kiện:

a) $MA^2 + MB^2 = 23$.

b) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$.

**Giải**

a) Gọi M(x; y; z) là điểm thoả yêu cầu bài toán.

Ta có: $MA^2 + MB^2 = 23$.

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + z^2 + (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 23$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 5y - 2z + 2 = 0$.

Vậy tập hợp những điểm M cần tìm là mặt cầu tâm $I(1; \frac{5}{2}; 1)$, bán kính

$R = \frac{5}{2}$.

b) Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD, I là trung điểm AB thì:

$G(\frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}), I(1; \frac{5}{2}; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CI}$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow 4MG = 2CI \Leftrightarrow MG = \frac{CI}{2} = \frac{5}{4}$ : không đổi.

Vậy tập hợp những điểm M cần tìm là mặt cầu tâm $G(\frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2})$ và bán kính $R = \frac{5}{4}$ có phương trình: $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{16}$

**Ví dụ 23:** Cho tứ diện đều (T) có các đỉnh có toạ độ $(x_i; y_i; z_i)$ với $1 \le i \le 4$, nội tiếp trong một mặt cầu đơn vị. Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 = \sum_{i=1}^{4} z_i^2 = \frac{4}{3} \text{ và } \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = \sum_{i=1}^{4} y_i z_i = \sum_{i=1}^{4} z_i x_i = 0$$

**Giải**

Ta kiểm tra được rằng kết luận đúng cho trường hợp tứ diện $A_oB_oC_oD_o$ có 4 đỉnh là $A_o(0; 0; 1)$

$B_o\left(\frac{2\sqrt{2}}{3};\ 0;\ -\frac{1}{3}\right)$, $C_o\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$, $D_o\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$

Bây giờ, ta chứng minh khẳng định đúng cho một tứ diện ABCD có các đỉnh $(x_i;\ y_i;\ z_i)$ bất kỳ. Đầu tiên, ta quay (T) quanh trục z cho đến khi một đỉnh của nó nằm trong mặt phẳng (Oyz). Tiếp theo, ta quay nó quanh trục Ox cho đến khi đỉnh này trùng với điểm $A_o(0;\ 0;\ 1)$. Sau đó, lại quay quanh trục Oz cho đến khi (T) trùng với tứ diện $A_oB_oC_oD_o$ đã nói ở trên $\Rightarrow$ đpcm.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Xét sự đồng phẳng của 3 vectơ

1) $\vec{a} = (1; -2; 2)$   $\vec{b} = (1; 0; 0)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$

2) $\vec{a} = (-5; 1; 4)$, $\vec{b} = (-3; 2; 3)$, $\vec{c} = (1; 2; 0)$

**ĐS:** 1) đồng phẳng. 2) không đồng phẳng.

**Bài 2**: Cho 4 điểm A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4) và D(4; 0; 5). Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh tứ diện. Tìm trọng tâm G của tứ diện.

**ĐS:** $G\left(\frac{15}{4};\ \frac{7}{4};\ \frac{14}{4}\right)$.

**Bài 3**: Cho $\Delta$: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$ và điểm A(0; 1; 3). Tìm điểm M trên $\Delta$ sao cho đoạn AM ngắn nhất.

**ĐS:** $M\left(\frac{1}{7};\ \frac{9}{7};\ \frac{17}{7}\right)$.

**Bài 4**: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC có trọng tâm G(1; 1; 2) với $A \in Ox$, $B \in Oy$ và $C \in Oz$.

1) Tìm toạ độ các điểm A, B, C.

2) Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và OC. Tìm toạ độ điểm E trên đường thẳng OM để $NE \perp OG$.

**ĐS:** 1) A(3; 0; 0), B(0; 3; 0) và C(0; 0; 6) 2) E(3; 3; 0)

**Bài 5:** Tìm hình chiếu M(2; –4; 7) lên Ox, Oy, Oz, (xOy), (yOz), (zOx).

**ĐS:** (2; 0; 0) ,(0; –4; 0) ,(0; 0; 7) ,(2; –4; 0) ,(0; –4; 7) ,(2; 0; 7)

**Bài 6:** Tìm điểm đối xứng M(–1; 9; 3) qua O, Ox, Oy, (xOy), (zOy).

**ĐS:** (1; –9; –3) ,(–1; –9; –3) ,(1; 9; –3) ,(–1; 9; –3), (1; 9; 3).

**Bài 7:** Cho $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (5, 7, 0)$, $\vec{c} = (3, -2, 4)$ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không và tính $|\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}|$

**ĐS:** không đồng phẳng, $\sqrt{381}$

ABC

**Bài 8:** Cho A (2,– 1, 7), B (4, 5, –2). Chứng minh O,A, B tạo thành tam giác, tìm giao điểm I của AB với mặt phẳng (yOz). Tìm chân phân giác trong OD.

**HD:** $\overline{IA} = k\overline{IB}$.

**Bài 9:** Cho 4 điểm A(6, –2, 3) B(2, 0, –1) , C(0, 1, 6) , D(4, 1, 0). Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh tứ diện. Tìm trọng tâm G.

**ĐS:** G(3; 0; 2).

**Bài 10:** Cho A (4, 2, 6), B (4, –4, 0), C (10, –2, 4). Tìm chân đường cao AH vuông góc BC.

**ĐS:** $H(\frac{5}{7};-\frac{19}{7};\frac{18}{7})$.

**Bài 11:** Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' biết toạ độ 4 đỉnh A(3, 0, 4), B(2, –1, 2), C(0, 5, –5), D'(2, 3, 5). Tìm 4 đỉnh còn lại.

**HD:** dùng các hình bình hành

**Bài 12:** Cho $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, 1)$. Tìm vectơ $\vec{d}$ thoả: $3\vec{a}.\vec{d} = 4\vec{b}.\vec{d} = 6\vec{c}.\vec{d} = 12$

**ĐS:** (1; 2; 1).

**Bài 13:** Cho A (4, –2, 6), B (4, 1, 0), C (1, 5, 4). Tìm điểm M thuộc Oxy để $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$ bé nhất.

**HD:** gọi G là trọng tâm tam giác ABC

**Bài 14:** Cho A (2, 3, 4) và B (–1, 8, 3). Tìm M ∈ (xOy) mà MA + MB bé nhất.

**HD:** kiểm tra sự cùng phía, khác phía của A, B đối với (xOy)

**Bài 15:** Cho A (–4, 4, 0), B (2, 0, 4), C (1, 2, –1), D (7, –2, 3). Chứng minh A, B, C, D đồng phẳng và tìm M thuộc AB để MC + MD bé nhất.

**HD:** ABDC là hình bình hành.

**Bài 16**: Cho tam giác ABC có: A(1; 1; 3), B(–1; 3; 2), C(–1; 2; 3). Tính diện tích tam giác ABC và thể tích tứ diện OABC.

**ĐS:** $S_{ABC} = \frac{3}{2}$. $V_{OABC} = \frac{3}{2}$.

**Bài 17:** Cho 4 điểm A(2; –4; 2), B(0; 2; –2), C(4; 8; 0), D(6; 2; 4). Chứng minh ABCD là hình thoi, tính diện tích và bán kính r đường tròn nội tiếp hình thoi.

**ĐS:** $S_{ABCD} = \sqrt{2736}$, $r = \sqrt{\frac{171}{14}}$.

**Bài 18**: Cho tam giác ABC có A(2; 0; 1), B(0; 1; 0), C(1; –1; –4).

1) Tìm toạ độ điểm D để ABCD là hình chữ nhật và điểm S ∈ mp(Oyz) sao cho SA ⊥ (ABCD).
2) Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

**ĐS:** 1) D(3; –2; –3), S(0; –3; 2) 2) $V_{S.ABCD} = 14$

**Bài 19:** Cho Δ ABC với A (2, –1, 3), B (4, 0, 1), C (–10, 5, 3). Tính chu vi, diện tích và phân giác trong BD.

**ĐS:** $S = 18$, $BD = 3\sqrt{5}$.

**Bài 20:** Tính diện tích tứ giác phẳng có 4 đỉnh A (4, 2, 6), B (4, –4, 0), C (10, –2, 4), D (–2, 0, 2).

**ĐS:** $12\sqrt{19}$.

**Bài 21:** Cho tứ diện A(6, –2, 3), B(2, 0, –1), C(0, 1, 6), D(4, 1, 0). Tính thể tích.

**ĐS:** $V = 12$.

**Bài 22:** Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' biết A(1, 3, 0) , A'(–2, 0, 1) B(2, –1, 6) C(2, 3, 0).

**HD:** thể tích lăng trụ tam giác bằng nửa thể tích hình hộp

**Bài 23:** Cho B (4, 0, 1), C (–10, 5, 3). Tìm $M \in Oy$ cách đều B và C.

**ĐS:** $(0; \frac{117}{10}; 0)$.

**Bài 24:** Tứ diện A (7, 9, 1), B (–2, –3, 2), C (1, 5, 5) D (–6, 2, 5). Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện .

**HD:** dùng quan hệ khoảng cách

**Bài 25:** Cho A (3, 5, –4), B (–1, 1, 2), C(–5, –5, –2) và M (5, 1, 5), N (4, 3, 2), P (–3, –2, 1). Chứng minh Δ ABC cân, Δ MNP vuông và M không thuộc mặt phẳng (ABC).

**HD:** dùng quan hệ khoảng cách

**Bài 26**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3).

1) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

2) Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**ĐS:** 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$ 2) H(2; 2; 2)

**Bài 27:** Lập phương trình mặt cầu tâm E (3, 5, 2) và tiếp xúc Ox.

**HD:** tìm hình chiếu của E lên Ox.

**Bài 28:** Cho tứ diện MNPQ có M(1, 1, 1), N(1, 2, 1), P(1, 1, 2), Q(2, 2, 1). Tính V và lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp.

**ĐS:** $V = \frac{1}{6}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

**Bài 29:** Cho tam giác ABC có A(1; –2; –3), B(0; 2; 1), C(3; 2; 0). Lập phương trình mặt cầu có đường tròn lớn là đường tròn qua A, B, C.

**HD:** tâm mặt cầu là tâm đường tròn qua A, B, C.

ABC

**Bài 30:** Giả sử A(3; 0; 4), B(1; 2; 3), C(9; 6; 4) là 3 đỉnh của hình bình hành ABCD. Tìm diện tích hình bình hành và lập phương trình mặt phẳng qua A, vuông góc BC.

**HD:** không cần tìm đỉnh D.

**Bài 31:** Xét vị trí tương đối của 2 mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$,

(S’) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 7 = 0$

**ĐS:** cắt nhau

**Bài 32:** Tìm quỹ tích các điểm M mà 3MA = 2MB với A (–2, 2, –2), B (3, –3, 3)

**HD:** gọi M(x; y; z)

**Bài 33:** Cho 2 hình vuông ABCD và ABMN cạnh a. Gọi G, K là trọng tâm tam giác ABM, ACN. Tính đoạn GK và thể tích hình chóp A. GKN.

**HD:** chọn hệ toạ độ Axyz với B(a; 0; 0), D(0; a; 0).

**Bài 34:** Cho lăng trụ đứng ABCD.A’B’C’D’ đáy là hình chữ nhật, AB = 2a, AD = a, AA’ = 3a. Gọi M, N là trung điểm AA’ B’C. Tính diện tích tam giác MND’

**HD:** chọn hệ toạ độ Axyz với B(2a; 0; 0), D(0; a; 0)

**Bài 35:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có 3 kích thước AB = b; AD = d và AA’ = c. Chứng minh tia A’t bất kì tạo với 3 mặt chung đỉnh A’ của hình hộp trên 3 góc có tổng bình phương cosin không đổi.

**HD:** chọn hệ toạ độ A’xyz vơi B’(b; 0; 0), D’(0; d; 0)..

**Bài 36:** Tứ diện SABC có SC = CA = AB = $a\sqrt{2}$ $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, M thuộc SA và N thuộc BC sao cho: AM = CN = t (0 < t < 2a). Tính đoạn MN và chứng minh khi MN bé nhất thì MN vuông góc BC, SA.

**HD:** chọn hệ toạ độ Axyz.

**Bài 37:** Cho hình lập phương ABCD.$A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD, N là tâm hình vuông $CC_1D_1D$. Tìm bán kính mặt cầu đi qua các điểm B, $C_1$, M, N.

**ĐS:** $R = \dfrac{a\sqrt{35}}{4}$

ABC

# §2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**Vectơ pháp tuyến** của mặt phẳng là vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng.

Một mặt phẳng có vô số vectơ pháp tuyến cùng phương với nhau nên ta có thể chọn tọa độ tỉ lệ.

**Phương trình tổng quát của mặt phẳng:**

Mặt phẳng qua $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và vectơ pháp tuyến $\overline{n} = (A, B, C)$

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

hay $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

**Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn**

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ khi cắt 3 trục Ox, Oy Oz tại 3 điểm khác gốc O là $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$.

**Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng:**

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Có 3 vị trí tương đối:

- Cắt nhau: $A : B : C \neq A' : B' : C'$
- Trùng nhau: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
- Song song: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

**Góc giữa 2 mặt phẳng:** mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overline{n}$ và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overline{n}'$ thì $\cos((P), (Q)) = |\cos(\overline{n}, \overline{n}')|$

**Chú ý**: Góc giữa 2 vectơ từ 0° đến 180° và các góc còn lại giữa đường thẳng, mặt phẳng đều từ 0° đến 90° Góc giữa 2 vectơ $\overline{u} = (x, y, z)$ và $\overline{v} = (x', y', z')$:

$$\cos(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

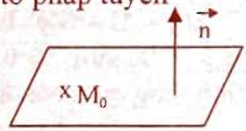
**Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:**

- (Oxy) là $|z_0|$
- (Oyz) là $|x_0|$
- (Ozx) là $|y_0|$
- (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ là: $d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

**Chú ý:**

- Đường cao của tứ diện là khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng đối diện.
- Ta có thể tìm chân hình chiếu của một điểm lên đường thẳng, mặt phẳng để đưa về khoảng cách giữa 2 điểm.

# DẠNG 1: LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG



– Mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A,B,C)$ có phương trình

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

và biến đổi thành dạng

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

– Phương trình các mặt tọa độ: (Oxy): $z = 0$, (Oyz): $x = 0$, (Ozx) : $y = 0$

– Mặt phẳng cắt 3 trục Ox, Oy Oz tại 3 điểm khác gốc O là $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

– Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

– Mặt phẳng đi qua gốc O có dạng

$$Ax + By + Cz = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

– Mặt phẳng song song hoặc chứa trục Ox có dạng

$$By + Cz + D = 0,\ B^2 + C^2 \neq 0.$$

– Mặt phẳng song song hoặc chứa trục Oy có dạng

$$Ax + Cz + D = 0,\ A^2 + C^2 \neq 0.$$

– Mặt phẳng song song hoặc chứa trục Oz có dạng

$$Ax + By + D = 0,\ B^2 + C^2 \neq 0.$$

– Mặt phẳng song song với mặt phẳng

$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ có dạng

$$Ax + By + Cz + D' = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,\ D' \neq D$$

**Ví dụ 1**: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua ba điểm $M(2; 0; -1)$, $N(1; -2; 3)$, $P(0; 1; 2)$

b) Đi qua ba điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(2; -4; 3)$, $C(4; 5; 6)$.

**Giải**

a) Phương trình (MNP) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.
Toạ độ của các điểm M, N, P là nghiệm của phương trình đó nên:

$$\begin{cases} 2A - C + D = 0 \\ A - 2B + 3C + D = 0 \\ B + 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A - C + D = 0 \\ A + 2B - 4C = 0 \\ A - 3B + C = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A - C + D = 0 \\ A + 2B - 4C = 0 \\ 5B - 5C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ A = 2C \\ D = -3C \end{cases}$$

Ta được phương trình: $2Cx + Cy + Cz - 3C = 0$. Hiển nhiên $C \neq 0$ (vì nếu $C = 0$ thì $A = B = C = 0$ : loại) nên chia hai vế của phương trình cho C, ta được phương trình mặt phẳng (MNP): $2x + y + z - 3 = 0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 3; 3)$.

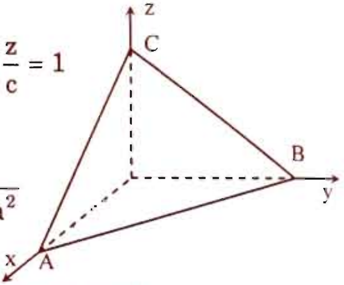
Chọn vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; -9; 39)$ hay $(6; 3; -13)$.

Vậy phương trình của mp(ABC):

$$6(x + 1) + 3(y - 2) - 13(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y - 13z + 39 = 0.$$

**Ví dụ 2:** Cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng ABC và tính diện tích tam giác ABC.

**Giải**



Phương trình theo đoạn chắn: (ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$\Leftrightarrow bcx + cay + abz - abc = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$ nên:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

**Ví dụ 3**: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua các hình chiếu của $A(2; -3; 4)$ lên các trục toạ độ

b) Trung trực của EF với $E(2; 3; -4)$, $F(4; -1; 0)$.

**Giải**

a) Gọi $A_1$, $A_2$, $A_3$ lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz. Khi đó: $A_1(2; 0; 0)$, $A_2(0; -3; 0)$, $A_3(0; 0; 4)$

Vậy phương trình của mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ theo đoạn chắn là: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

b) Gọi I là trung điểm của EF thì $I(3; 1; -2)$

Mặt phẳng trung trực của đoạn EF qua I và có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = \overrightarrow{EF} = (2; -4; 4) \text{ hay } (1; -2; 2)$$

Vậy (P): $1(x - 3) - 2(y - 1) + 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 3 = 0$.

**Ví dụ 4**: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua điểm $G(1; 2; 3)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Đi qua điểm $H(2; 1; 1)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

**Giải**

a) Giả sử $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$.

Vì $G(1; 2; 3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\frac{a + 0 + 0}{3} = 1;\ \frac{0 + b + 0}{3} = 2;\ \frac{0 + 0 + c}{3} = 3$$

Suy ra $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$.

Vậy phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng cần tìm là:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1.$$

ABC

b) Nếu mặt phẳng đi qua H(2; 1; 1) và cắt các trục toạ độ tại A, B, C thì tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, do đó H là trực tâm của tam giác ABC thì OH ⊥ mp(ABC). Vậy mp(ABC) đi qua H và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$ nên có phương trình:
$2(x - 2) + (y - 1) + (z - 1) = 0$ hay $2x + y + z - 6 = 0$.

**Ví dụ 5**: Lập phương trình của các mặt phẳng toạ độ và các mặt phẳng đi qua điểm I(2; 6; –3) và song song với các mặt phẳng toạ độ.

**Giải**

Mặt phẳng toạ độ Oxy đi qua O và có VTPT $\vec{k} = (0; 0; 1)$
nên có phương trình: $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$
Vậy mp(Oxy): $z = 0$.

Tương tự mp(Oyz) đi qua O và có VTPT $\vec{i} = (1; 0; 0)$ nên mp(Oyz): $x = 0$,

mp(Ozx) đi qua O và có VTPT $\vec{j} = (0; 1; 0)$ nên mp(Ozx) : $y = 0$.

Phương trình của mặt phẳng đi qua điểm I(2; 6; –3) và:
– song song với mặt phẳng Oxy là $z + 3 = 0$.
– song song với mặt phẳng Oyz là $x - 2 = 0$.
– song song với mặt phẳng Ozx là $y - 6 = 0$.

**Ví dụ 6**: Lập phương trình mặt phẳng:

a) Đi qua hai điểm A(1; 1; –1), B(5; 2; 1) và song song với trục Oz

b) Đi qua điểm M(3; 2; –1) và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình $x - 5y + z = 0$.

**Giải**

a) Giả sử mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với Oz, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ thì $\vec{n}$ phải vuông góc với $\overrightarrow{AB} = (4; 1; 2)$ và vuông góc với vectơ đơn vị của Oz là $\vec{k} = (0; 0; 1)$, chọn:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{k}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}4 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}\right) = (1; -4; 0)$$

Vì (P) đi qua điểm A nên phương trình của (P) là:
$1.(x - 1) - 4(y - 1) + 0 = 0$ hay $x - 4y + 3 = 0$

Cách khác: Mặt phẳng (P) song song với Oz nên có phương trình:
$A'x + B'y + D' = 0$ với $D' \neq 0$, $A'^2 + B'^2 \neq 0$

Mặt phẳng đó đi qua A và B nên toạ độ của A và B thoả mãn phương trình đó: $\begin{cases}A' + B' + D' = 0\\5A' + 2B' + D' = 0\end{cases} \Rightarrow 4A' + B' = 0$.

Chọn $A' = 1$, $B' = -4$ và do đó $D' = 3$ và được phương trình của (P) là:
$x - 4y + 3 = 0$

b) Mặt phẳng (P) cần tìm phải song song với mặt phẳng (Q): $x - 5y + z = 0$ nên hai mặt phẳng có cùng vectơ pháp tuyến là (1; –5; 1), mp(P) đi qua điểm M(3; 2; –1) nên có phương trình là:
$(x - 3) - 5(y - 2) + (z + 1) = 0$ hay $x - 5y + z + 8 = 0$.

**Ví dụ 7**: Cho tứ diện ABCD với A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song mp(BCD).

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và song song với CD.

**Giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{BC} = (4; -6; 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$ mp(BCD) có VTPT $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-12; -10; -6)$ hay (6; 5; 3). Mặt phẳng qua A và song song với mp(BCD) có phương trình
$6(x - 5) + 5(y - 1) + 3(z - 3) = 0$ hay $6x + 5y + 3z - 44 = 0$.
Vì A không thuộc mp(BCD) nên đó là mặt phẳng cần tìm.

b) $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$. Mặt phẳng đi qua A, B song song với CD có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CD}] = (10; 9; 5)$. Vậy phương trình của nó là $10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0$ hay $10x + 9y + 5z - 74 = 0$. Vì C không thuộc mp nên đó là mặt phẳng cần tìm.

**Ví dụ 8**: Lập phương trình mặt phẳng (P):

a) Chứa trục Oz và đi qua điểm E(2; –1; 2)

b) Chứa giao tuyến của 2 mặt phẳng $x - y + z - 4 = 0$, $3x - y + z - 1 = 0$ và đi qua F(2; 1; –1).

**Giải**

a) $\overrightarrow{OE} = (2; -1; 2)$, $\overrightarrow{i} = (1; 0; 0)$ là vectơ chỉ phương của Ox. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $[\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{i}] = (0, 2; 1)$.
Vậy (P): $2y + z = 0$.

b) Các điểm thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng có toạ độ (x; y; z) thoả mãn hệ $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Cho y = 0 thì $\begin{cases} x + z = 4 \\ 3x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2}; 0; \dfrac{11}{2}\right)$.

Cho z = 0 thì $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{11}{2}; 0\right)$.

Do đó mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M\left(-\dfrac{3}{2}; 0; \dfrac{11}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{11}{2}; 0\right)$ và F(2; 1; –1), ta lập được phương trình: $15x - 7y + 7z - 16 = 0$.

**Ví dụ 8**: Viết phương trình mặt phẳng sau:

a) Đi qua điểm M(1; 3; –2) và vuông góc với trục Oy.

b) Đi qua điểm M(1; 3; –2) và vuông góc với đường thẳng $M_1M_2$, với $M_1(0; 2; -3)$, $M_2(1; -4; 1)$.

**Giải**

a) Mặt phẳng qua điểm M(1; 3; –2) vuông góc với trục Oy nên nó song song với mặt phẳng Oxz. Vậy phương trình của nó là y = 3 hay y – 3 = 0.

Cách khác: Mặt phẳng cần tìm qua M và có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = \vec{j} = (0; 1; 0)$ nên phương trình của nó là:

$$0(x - 1) + 1(y - 3) + 0(z + 2) \Leftrightarrow y - 3 = 0.$$

b) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là: $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1; -6; 4)$.

Vậy phương trình của nó là:

$$1(x - 1) - 6(y - 3) + 4(z + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 6y + 4z + 25 = 0.$$

**Ví dụ 9**: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua hai điểm A(0; 1; 1), B(–1; 0; 2) và vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$.

b) Đi qua hai điểm M(1; 2; –2) và N(2; 0; –2) và lần lượt vuông góc với các mặt phẳng toạ độ.

**Giải**

a) Mặt phẳng (P) cần tìm phải vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$ nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) vuông góc với $\vec{n}' = (1; -1; 1)$ và mp(P) đi qua hai điểm A, B nên $\vec{n}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$.

Chọn $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}'] = (0; 2; 2)$.

Phương trình của (P) là: $2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$ hay $y + z - 2 = 0$.

b) Mặt phẳng (α) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Oxy nên song song hoặc chứa Oz ⇒ (α) có dạng $Ax + By + D = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$

Mp(α) đi qua M(1; 2; –2) và N(2; 0; –2)

ta có hệ: $\begin{cases} A + 2B + D = 0 \\ 2A + D = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} A = 2B \\ D = -4B \end{cases}$

Lấy B = 1, thì (β) có phương trình $2x + y - 4 = 0$.

– Tương tự, mặt phẳng (P) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Oyz có phương trình $z + 2 = 0$. Mặt phẳng (γ) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Ozx có phương trình: $z + 2 = 0$.

**Ví dụ 10**: Cho tam giác ABC với A(–3; 5; 7), B(0; –1; 1), C(3; 1; –2). Viết phương trình các mặt phẳng đi qua một đỉnh của tam giác và vuông góc với cạnh đối diện của đỉnh đó.

**Giải**

Mặt phẳng đi qua A(–3; 5; 7) vuông góc với BC nên có VTPT

$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (3; 2; -3)$ có phương trình:

$$3(x + 3) + 2(y - 5) - 3(z - 7) = 0 \text{ hay } 3x + 2y - 3z + 20 = 0.$$

Tương tự, mặt phẳng đi qua B vuông góc với AC: $6x - 4y - 9z + 5 = 0$ và mặt phẳng đi qua C vuông góc với AB: $x - 2y - 2z - 5 = 0$.

ABC

**Ví dụ 11**: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua điểm M(2; −1; 2), song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $2x - y + 3z + 1 = 0$.

b) Đi qua điểm M(3; −1; −5) đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

**Giải**

a) Trục Oy có vectơ đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$

Mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2; -1; 3)$

Mặt phẳng cần tìm có VTPT $\vec{n}\,'$ vuông góc với $\vec{j}$, $\vec{n}$ nên chọn

$$\vec{n} = \left[\vec{j}\,; \vec{n}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right) = (3; 0; -2)$$

Từ đó có phương trình: $3x - 2z - 2 = 0$.

b) Mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ có VTPT $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$

Mặt phẳng $5x - 4y + 3z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$

Mặt phẳng cần tìm có VTPT $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ nên chọn

$\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 1; -2)$.

Phương trình mặt phẳng: $2x + y - 2z + D = 0$, mặt phẳng qua M(3; −1; −5) nên $D = -15$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm: $2x + y - 2z - 15 = 0$.

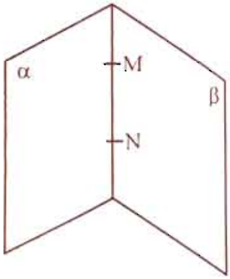
**Ví dụ 12:** Trong không gian Oxyz, cho phương trình hai mặt phẳng: $(\alpha)$: $x + y + z - 3 = 0$, $(\beta)$: $2x - y - 2z + 6 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ và thoả mãn thêm một trong các điều kiện sau:

a) Song song với Oz

b) Qua K(1; 2; 3)

c) Vuông góc với mặt phẳng $2x - z + 7 = 0$.

**Giải**



Các điểm chung của 2 mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$ có toạ độ thoả mãn hệ phương trình $\begin{cases}x + y + z - 3 = 0\\ 2x - y - 2z + 6 = 0\end{cases}$

Cho $x = 0$ thì $\begin{cases}y + z = 3\\ -y - 2z = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 0\\ z = 3\end{cases}$

Cho $z = 0$ thì $\begin{cases}x + y = 3\\ 2x - y = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\ y = 4\end{cases}$

Do đó hai điểm M(−1; 4; 0), N(0; 0; 3) thuộc mặt phẳng (P).

a) $\overrightarrow{MN} = (1; -4; 3)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vectơ đơn vị của Oz. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $[\overrightarrow{MN}\ \ \vec{k}] = (-4; -1; 0)$

Vậy (P): $4x + y = 0$.

b) $\overrightarrow{MN} = (1; -4; 3)$, $\overrightarrow{MK} = (2; -2; 3)$, chọn VTPT

$\vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MK}] = (-6; 3; 6)$ hay $(-2; 1; 2)$.

Suy ra (P): $-2x + y + 2z - 6 = 0$.

c) $\overrightarrow{MN} = (1; -4; 3)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng ($\alpha$): $2x - z + 7 = 0$ là $\overrightarrow{n_\alpha} = (2; 0; -1)$ suy ra $[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{n_\alpha}] = (4; 7; 8)$ là vectơ pháp tuyến (P) cần tìm.

Từ đó suy ra (P): $4x + 7y + 8z - 24 = 0$.

**Ví dụ 13**: Viết phương trình của mặt phẳng qua điểm M(5; 4; 3) và cắt ba trục toạ độ ở ba điểm cách đều gốc toạ độ.

**Giải**

Mặt phẳng cần tìm có dạng đoạn chắn: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $|a| = |b| = |c| \neq 0$.

Điểm M(5; 4; 3) thuộc mặt phẳng nên: $\frac{5}{a} + \frac{4}{b} + \frac{3}{c} = 1 \quad (1)$

Với $b = a$, $c = a$, (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 12$.

Với $b = a$, $c = -a$, (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{a} + \frac{4}{a} - \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 6$.

Với $b = -a$, $c = a$, (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{a} - \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$.

Với $b = -a$, $c = -a$ (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{a} - \frac{4}{a} - \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = -2$.

Do đó bốn mặt phẳng cần tìm là:

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 12 = 0.$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} - \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + y - z - 6 = 0$$

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow x - y + z - 4 = 0.$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow -x + y + z - 2 = 0.$$

**Ví dụ 14**: Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng

a) $2x - y + 4z + 5 = 0$ và $3x + 5y - z - 1 = 0$.

b) $x + 2y + z - 1 = 0$ và $x + 2y + z + 5 = 0$.

**Giải**

a) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi:

$$\frac{|2x - y + 4z + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{|3x + 5y - z - 1|}{\sqrt{9 + 25 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\,|2x - y + 4z + 5| = \sqrt{3}\,|3x + 5y - z - 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(2x - y + 4z + 5) = \pm\sqrt{3}(3x + 5y - z - 1)$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng:

$$(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} + 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} + \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} + \sqrt{3} = 0,$$

$$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} - 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} - \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0.$$

ABC

b) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng:

$$\frac{|x + 2y + z - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|x + 2y + z + 5|}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y + z - 1| = |x + 2y + z + 5|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = x + 2y + z + 5 \\ x + 2y + z - 1 = -(x + 2y + z + 5) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z + 2 = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm M là một mặt phẳng có phương trình:

$x + 2y + z + 2 = 0$.

**Ví dụ 15**: Cho điểm M trong không gian có toạ độ:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t_1 - 4t_2 \\ y = 4 - t_2 \\ z = 2 - 3t_1 \end{cases} \quad \text{với } t_1 ; t_2 \text{ thay đổi.}$$

Chứng minh các điểm M nằm trên một mặt phẳng.

**Giải**

Ta khử lần các tham số: $y = 4 - t_2 \Rightarrow t_2 = 4 - y$ $\quad z = 2 - 3t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2 - z}{3}$

Thế vào thì $x = 2 + (2 - z) - 4(4 - y)$

Do đó $x - 4y - z + 12 = 0$.

Vậy các điểm thuộc mặt phẳng (P): $x - 4y - z + 12 = 0$.

**Ví dụ 16:** Trong không gian toạ độ Oxyz cho hai điểm A(1; −1; 2), B(2; 0; 1)

a) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 2$.

b) Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy).

**Giải**

a) Giả sử M(x; y; z). Ta có: $MA^2 - MB^2 = 2$.

$$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (2 - z)^2 - (2 - x)^2 - y^2 - (1 - z)^2 = 2.$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

Vậy quỹ tích các điểm M là mặt phẳng có phương trình trên.

b) Mặt phẳng (OAB) đi qua O, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overline{OA}, \overline{OB}] = (-1; 3; 2)$ nên có phương trình: $-x + 3y + 2z = 0$.

Điểm M(x; y; z) cách đều mp(OAB) và mp(Oxy) khi và chỉ khi:

$$\frac{|-x + 3y + 2z|}{\sqrt{1+9+4}} = |z|$$

$$\Leftrightarrow -x + 3y + 2z = \pm\sqrt{14}z$$

$$\Leftrightarrow -x + 3y + (2 \pm \sqrt{14})z = 0$$

Vậy quỹ tích là hai mặt phẳng có phương trình trên.

**Ví du 17**: Cho tam giác ABC có A(0; 4; 1), B(1; 0; 1), C(3; 1; −2). Lập phương trình mặt phẳng (ABC) và tìm toạ độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

ABC

**Giải:**

Ta có $\overrightarrow{AC} = (3; -3; -3), \overrightarrow{BC} = (2; 1; -3)$ nên lập được phương trình mặt phẳng (ABC) : $4x + y + 3z - 7 = 0$

Gọi H(x; y; z) là trực tâm tam giác ABC.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x; y - 4; z - 1)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 1; y; z - 1)$, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + y + 3z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H : \begin{cases} x = \dfrac{15}{13} \\ y = \dfrac{7}{13} \\ z = \dfrac{8}{13} \end{cases}$$

Gọi I(x; y; z) là đường tròn ngoại tiếp: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ I \in (ABC) \end{cases}$

Từ đó giải được tâm $I\left(\dfrac{37}{26}; \dfrac{29}{13}; -\dfrac{4}{13}\right)$.

**Ví dụ 18:** Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua các điểm M(0; 0; 1), N(3; 0; 0) và tạo với mặt phẳng Oxy góc $\frac{\pi}{3}$

**Giải**

Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; a; b)$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (3; 0; -1)$

Vì $\vec{n}$ $\overrightarrow{MN} = 3.1 + 0 - b = 0$ nên $b = 3$. Do đó $\vec{n} = (1; a; 3)$.

Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{a^2 + 10}} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{26}$

PT mặt phẳng (P) là: $1.(x - 0) \pm \sqrt{26}\ (y - 0) + 3.(z - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x \pm \sqrt{26}.y + 3z - 3 = 0.$$

**Ví dụ 19**: Viết phương trình mp(P) chứa trục Oz và tạo với mp(α) có phương trình: $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°

**Giải**

Mặt phẳng (P) chứa Oz nên có dạng:

$Ax + By = 0 \Rightarrow \vec{n}_P = (A; B; 0)$, $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -\sqrt{5})$.

Theo giả thiết của bài toán

$$\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_\alpha) = \frac{|2A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{4 + 1 + 5}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2|2A + B| = \sqrt{10}.\sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow 6A^2 + 16AB - 6B^2 = 0.$

ABC

Lấy B = 1, ta có: $6A^2 + 16A - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{1}{3} \\ A_2 = -3 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng (P) phải tìm: $\frac{1}{3}x + y = 0; -3x + y = 0$.

**Ví dụ 20**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1; 2; 1), B(−2; 1; 3), C(2; −1; 1) và D(0; 3; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

**Giải**

Mặt phẳng (P) thoả mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) qua A, B và song song với CD.

Vectơ pháp tuyến của (P): $\overline{n} = [\overline{AB}, \overline{CD}]$.

Ta có: $\overline{AB} = (-3; -1; 2)$, $\overline{CD} = (-2; 4; 0) \Rightarrow \overline{n} = (-8; -4; -14)$.

Phương trình (P): $4x + 2y + 7z - 15 = 0$.

Trường hợp 2: (P) qua A, B và cắt CD. Suy ra (P) cắt CD tại trung điểm I của CD.

$I(1; 1; 1) \Rightarrow \overline{AI} = (0; -1; 0)$, vectơ pháp tuyến của (P):

$\overline{n} = [\overline{AB}, \overline{AI}] = (2; 0; 3)$.

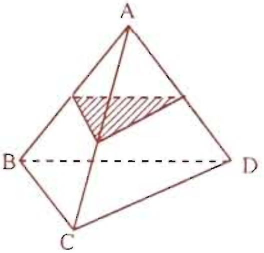
Phương trình (P): $2x + 3z - 5 = 0$.

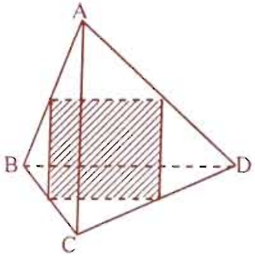
Vậy (P): $4x + 2y + 7z - 15 = 0$ hoặc (P): $2x + 3z - 5 = 0$.

**Ví dụ 21**: Cho tứ diện ABCD với A(3; 5; −1), B(7; 5; 3), C(9; −1; 5), D(5; 3; −3). Viết phương trình mặt phẳng cách đều 4 đỉnh của tứ diện đó.

**Giải**

Một mặt phẳng cách đều hai điểm M, N thì hoặc nó đi qua trung điểm của MN hoặc nó song song với MN. Vì vậy, để mặt phẳng (P) cách đều bốn đỉnh A, B, C, D của hình tứ diện thì:





– Hoặc mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện. Có bốn mặt phẳng như vậy đi qua trung điểm một cạnh và song song với một mặt.

– Hoặc mặt phẳng (P) chứa hai đường trung bình của tứ diện. Có ba mặt phẳng như vậy đi qua trung điểm một cạnh và song song với 2 cạnh đối chung mút. Từ đó tìm được bảy mặt phẳng thoả mãn yêu cầu đầu bài là:

$x - z - 6 = 0$; $x + y - 10 = 0$; $x + 2y - z - 8 = 0$; $2x + y - z - 14 = 0$
$x - y - z - 2 = 0$ ; $2x + y + z - 16 = 0$; $5x + y - 2z - 28 = 0$.

**Ví dụ 22**: Trong hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $M_1(1;\ 0;\ 1)$, $M_2(2;\ -1;\ 0)$ và $M_3(0;\ 0;\ 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M_3$ mà khoảng cách từ $M_1$ và $M_2$ đến (P) đều bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Giải**

Mặt phẳng (P) đi qua $M_3(0;\ 0;\ 1)$ nên có phương trình

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - 1) = 0$$

hay $Ax + By + Cz - C = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$.

Khoảng cách từ $M_1$, $M_2$ đến (P) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\frac{|A + C - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2A - B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó $|A| = |2A - B - C|$ hay $\pm A = 2A - B - C$
Suy ra $C = A - B$ hoặc $C = 3A - B$.

- Với $C = A - B$ thì từ $\dfrac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2 = A^2 + B^2 + (A - B)^2 \Leftrightarrow 2B(B - A) = 0.$$

Nếu $B = 0$ thì $C = A$, ta lấy $A = 1$ thì (P) có phương trình: $x + z - 1 = 0$
Nếu $A = B$ thì $C = 0$. Ta lấy $A = 1$ thì (P) có phương trình: $x + y = 0$.

- Với $C = 3A$ thì từ $\dfrac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2 = A^2 + B^2 + (3A - B)^2 \Leftrightarrow 8A^2 - 6AB + 2B^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow\ 4A^2 - 3AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow (2A - \frac{3}{4}B)^2 + \frac{7B^2}{16} = 0$$

Do đó $2A - \frac{3}{4}B = 0$ và $B = 0$, tức là $A = 0$, $B = 0$ và do đó $C = 0$: loại

**Ví dụ 23**: Trong hệ toạ độ Oxyz cho điểm $M(1;\ 2;\ 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích bé nhất.

**Giải**

Giả sử $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$ với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Khi đó (P) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì M nằm trên (P) nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

Theo bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq 27.\frac{6}{abc} \Rightarrow \frac{abc}{6} \geq 27$$

ABC

Dấu = " xảy ra khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}$ hay a = 3; b = 6; c = 9.

Thể tích tứ diện OABC là $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{abc}{6} \geq 27$.

Vậy thể tích nhỏ nhất là 27. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1.$$

**Ví dụ 24:** Trong không gian Oxyz cho ba điểm $M_1(2; 1; 1)$; $M_2(3; 1; 2)$, $M_3(0; -1; -4)$.

a) Tính diện tích tam giác $M_1M_2M_3$ và thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M_1$; $M_2$; $M_3$.

c) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M_1$ và vuông góc với đường thẳng $M_2M_3$.

d) Viết phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm $M_1$, $M_2$ và song song với đường thẳng $OM_3$.

**Giải**

a) Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2; -2; -5)$

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right]\right|$$

Ta có $\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\right) = (2; 3; -2)$

Vậy $S = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9 + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

Thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$ là: $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right].\overrightarrow{OM_3}\right|$

Ta có $\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right] = (1; -1; -1)$ ; $\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right].\overrightarrow{OM_3} = 0 + 1 + 4 = 5$

Vậy $V = \frac{5}{6}$.

b) Vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = (2; 3; -2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Vậy (α) có phương trình: $2(x - 2) + 3(y - 1) - 2(z - 1) = 0$

hay $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

c) Ta có $\overrightarrow{M_2M_3} = (-3; -2; -6)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β).

Vậy (β) có phương trình:

$-3(x - 2) - 2(y - 1) - 6(z - 1) = 0$ hay $3x + 2y + 6z - 14 = 0$.

d) Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 0; 1)$ và $\overrightarrow{OM_3} = (0; -1; -4)$ nên mặt phẳng (γ) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{OM_3}\right] = (1; 4; -1)$. Vậy (γ) có phương trình:

$1.(x - 2) + 4(y - 1) - 1.(z - 1) = 0$ hay $x + 4y - z - 5 = 0$.

## DẠNG 2 : TƯƠNG GIAO – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

**Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng:**

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Có 3 vị trí tương đối:

– Cắt nhau : $A : B : C \neq A' : B' : C'$

– Trùng nhau : $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

– Song song : $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

**Chú ý :**

– Cho mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$. Hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nằm về hai phía của mặt phẳng (P) khi và chỉ khi:
$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D).(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$.

Hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nằm cùng phía của mặt phẳng (P) khi và chỉ khi: $(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D).(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0$.

– Ứng dụng tọa độ trong không gian để giải các bài toán hình không gian cổ điển, quan hệ song song, vuông góc, độ dài, góc khoảng cách, vị trí tương đối,…

**Ví dụ 1**: Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình sau:

a) $x + 2y - z + 5 = 0$ và $2x + 3y - 7z - 4 = 0$.

b) $x - 2y + z - 3 = 0$ và $2x - 4y + 2z - 6 = 0$.

c) $x + y + z - 1 = 0$ và $2x + 2y + 2z + 3 = 0$.

**Giải**

a) Hai VTPT là $\overline{n} = (1; 2; -1)$, $\overline{n}' = (2; 3; -7)$

Hai vectơ pháp tuyến không cùng phương nên hai mặt phẳng cắt nhau.

b) Các hệ số của 2 phương trình tương ứng tỉ lệ nên hai mặt phẳng trùng nhau.

c) Ta có $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$ nên hai mặt phẳng song song.

**Ví dụ 2**: Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng cho bởi phương trình sau:

a) $3x - 2y + 3z + 5 = 0$ và $9x - 6y - 9z - 5 = 0$.

b) $x - y + 2z - 4 = 0$ và $10x - 10y + 20z - 40 = 0$.

c) $2x - 4y + 6z - 2 = 0$ và $3x - 6y + 9z + 3 = 0$.

**Giải**

a) Ta có $3: (-2): 3 \neq 9: (-6) : (-9)$ nên hai mặt phẳng cắt nhau.

b) $\frac{1}{10} = \frac{-1}{-10} = \frac{2}{20} = \frac{-4}{-40}$ nên hai mặt phẳng trùng nhau.

c) Ta có $\frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} = \frac{6}{9} \neq \frac{-2}{3}$ nên hai mặt phẳng song song.

ABC

**Ví dụ 3:** Xác định giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây song song:

a) $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$.

b) $2x + y + mz - 2 = 0$ và $x + ny + 2z + 8 = 0$.

**Giải**

a) Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi $\frac{2}{m} = \frac{n}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{7}$

Vậy $n = -1$, $m = -4$.

b) Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi $\frac{2}{1} = \frac{1}{n} = \frac{m}{2} \neq \frac{-2}{8}$

Vậy $m = 4$, $n = \frac{1}{2}$

**Ví dụ 4**: Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng:

(P): $2x - y - 3z + 1 = 0$, (Q): $x + 3y - 2z - 2 = 0$ và mặt phẳng

(R): $mx - (m + 1)y + (m + 5)z + 2 = 0$, với m là một số thay đổi.

a) Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

b) Tìm m để cho mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (P).

**Giải**

a) Ta có $2 : (-1) : (-3) \neq 1 : 3 : (-2)$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

b) Điều kiện mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (P) là:

$$\frac{m}{2} = \frac{-(m+1)}{-1} = \frac{m+5}{-3} \neq \frac{2}{1}$$

Từ $\frac{m}{2} = \frac{-(m+1)}{-1}$ ta suy ra $m = -2$. Giá trị $m = -2$ thoả điều kiện nên với $m = -2$ thì hai mặt phẳng (R) và (P) song song.

**Ví dụ 5**: Hãy xác định giá trị của m để các cặp mặt phẳng sau đây vuông góc với nhau:

a) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $x + 3y + 2z + 5 = 0$

b) $5x + y - 3z - 2 = 0$ và $2x + my - 3z + 1 = 0$

**Giải**

a) Hai VTPT $\vec{n} = (3; -5; m)$, $\vec{n}' = (1; 3; 2)$. Điều kiện 2 mặt phẳng vuông góc là: $\vec{n} . \vec{n}' = 0$

$\Leftrightarrow 3.1 + (-5).3 + m.2 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

b) Hai VTPT $\vec{n} = (5; 1; -3)$, $\vec{n}' = (2; m; -3)$. Điều kiện 2 mặt phẳng vuông góc là: $\vec{n} . \vec{n}' = 0$.

$\Leftrightarrow 5.2 + 1.m + (-3).(-3) = 0 \Leftrightarrow m = -19$.

**Ví dụ 6**: Cho hai mặt phẳng có phương trình là:

$2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$.

Với giá trị nào của m thì:

a) Hai mặt phẳng đó song song

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc.

**Giải**

Hai mặt phẳng đã cho có các vectơ pháp tuyến lần lượt là :

$\overrightarrow{n_1}(2; -m; 3)$, $\overrightarrow{n_2} = (m + 3; -2; 5m + 1)$.

Ta có: $[\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2}] = (-5m^2 - m + 6; -7m + 7; m^2 + 3m - 4)$

Hai vectơ đó cùng phương khi và chỉ khi $[\vec{n}_1; \vec{n}_2] = \vec{0}$, tức là:

$$\begin{cases} -5m^2 - m + 6 = 0 \\ -7m + 7 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1, m = -\dfrac{6}{5} \\ m = 1 \\ m = 1, m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Khi đó hai mặt phẳng có phương trình là $2x - y + 3z - 5 = 0$ và $4x - 2y + 6z - 10 = 0$ nên chúng trùng nhau. Vậy

a) Không có giá trị m nào để hai mặt phẳng đó song song

b) Khi m = 1, hai mặt phẳng đó trùng nhau.

c) Khi m ≠ 1, hai mặt phẳng đó cắt nhau.

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overline{n_1} . \overline{n_2} = 0$.

$\Leftrightarrow 2(m + 3) + 2m + 3(5m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{19}$

**Ví dụ 7:** Xác định các giá trị p và m để ba mặt phẳng sau đây đi qua một đường thẳng:

$5x + py + 4z + m = 0$; $3x - 7y + z - 3 = 0$; $x - 9y - 2z + 5 = 0$.

**Giải**

Các điểm chung trên 2 mặt phẳng $3x - 7y + z - 3 = 0$ và $x - 9y - 2z + 5 = 0$

có toạ độ thoả mãn hệ: $\begin{cases} 3x - 7y + z - 3 = 0 \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{7}$, $z = \dfrac{18}{7}$ suy ra $A\left(\dfrac{1}{7}; 0; \dfrac{18}{7}\right)$

Cho $z = 0 \Rightarrow x = \dfrac{31}{10}$, $y = \dfrac{9}{10}$ suy ra $B\left(\dfrac{31}{10}; \dfrac{9}{10}; 0\right)$.

Ba mặt phẳng cùng đi qua một đường thẳng khi mặt phẳng $5x + py + 4z + m = 0$ đi qua hai điểm A và B.

Thay toạ độ của các điểm A, B vào phương trình mặt phẳng $5x + py + 4z + m = 0$ ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} \dfrac{5}{7} + \dfrac{72}{7} + m = 0 \\ \dfrac{155}{10} + \dfrac{9p}{10} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11 \\ p = -5 \end{cases}$$

ABC

**Ví dụ 8:** Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt có các phương trình sau:

$Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Bx + Cy + Az + D_2 = 0$ $\quad Cx + Ay + Bz + D_3 = 0$.

Với điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ và $AB + BC + CA = 0$, chứng minh rằng ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau.

**Giải**

Các vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt là:

$\overline{n_P} = (A; B; C)$ $\quad \overline{n_Q} = (B; C; A)$, $\quad \overline{n_R} = (C; A; B)$

Ta có: $\overline{n_P} \quad \overline{n_Q} = \overline{n_Q} \quad \overline{n_R} = \overline{n_R} \quad \overline{n_P} = AB + BC + CA = 0$.

Vậy ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau.

**Ví dụ 9:** Chứng tỏ rằng các mặt phẳng (α), (β), (γ) (δ) sau đây là các mặt phẳng chứa bốn mặt của một hình hộp chữ nhật:

(α): $7x + 4y - 4z + 30 = 0$ $\quad$ . (β): $36x - 51y + 12z + 17 = 0$

(γ): $14x + 8y - 8z - 12 = 0$ $\quad$ (δ): $12x - 17y + 4z - 3 = 0$.

**Giải**

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (γ) vì: $\frac{7}{14} = \frac{4}{8} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{30}{-12}$

Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (δ) vì: $\frac{36}{12} = \frac{-51}{-17} = \frac{12}{4} \neq \frac{17}{-3}$

Mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (β) vì:

$$7.36 + 4(-51) + (-4).12 = 252 - 204 - 48 = 0.$$

Vậy bốn mặt phẳng (α), (β), (γ), (δ) là các mặt phẳng chứa bốn mặt của một hình hộp chữ nhật trong đó: (α) // (γ), (β) // (δ) và (α) ⊥ (β).

**Ví dụ 10**: Cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x - 3y + 5z - 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của mặt phẳng đó với các trục Ox, Oy, Oz.

b) Tính thể tích tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (P) và 3 mặt phẳng toạ độ.

**Giải**

a) Cho $y = z = 0$ thì giao với trục Ox tại $A(\frac{1}{2}; 0; 0)$

Cho $x = z = 0$ thì giao với trục Oy tại $B(0; -\frac{1}{3}; 0)$

Cho $x = y = 0$ thì giao với trục Oz tại $C(0; 0; \frac{1}{5})$

b) Tứ diện cần tìm OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên

$$V = \frac{1}{6}.OA.OB.\ OC = \frac{1}{6}.\left|\frac{1}{2}\right|.\left|-\frac{1}{3}\right|.\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{180}.$$

**Ví dụ 11**: Cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x - y + 2z - 1 = 0$ và điểm $M_o(1; 1; -1)$.

a) Hãy tìm toạ độ hình chiếu H của điểm $M_o$ trên (P).

b) Hãy tìm toạ độ điểm M' đối xứng với điểm $M_o$ qua mặt phẳng (P).

ABC

### Giải

a) Giả sử $H(x_H; y_H; z_H)$. Vectơ $\overline{HM_o}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\overline{n} = (3; -1; 2)$ của mặt phẳng (P) nên tồn tại t sao cho $\overline{HM_o} = t\overline{n}$.

Do đó $\overline{HM_o}.\,\overline{n} = t.\overline{n}^2$ = hay:

$(1 - x_H)3 + (1 - y_H)(-1) + (-1 - z_H)2 = t(3^2 + (-1)^2 + 2^2)$

$\Leftrightarrow -(3x_H - y_H + 2z_H) = 14t.$

Vì H thuộc mặt phẳng (P) $\Rightarrow 3x_H - y_H + 2z_H = 1$ nên $-1 = 14t \Rightarrow t = -\dfrac{1}{14}$

Ta có $\overline{HM_o} = -\dfrac{1}{14}\overline{n}$ nên

$$\begin{cases} 1 - x_H = -\dfrac{1}{14}.3 \\ 1 - y_H = -\dfrac{1}{14}(-1) \\ -1 - z_H = -\dfrac{1}{14}.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{17}{14} \\ y_H = \dfrac{13}{14} \\ z_H = \dfrac{-6}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{17}{14}; \dfrac{13}{14}; \dfrac{-6}{7}\right)$$

b) Giả sử $M'(x'; y'; z')$. Vì H là trung điểm của $M_oM'$ nên:

$$\begin{cases} \dfrac{x_o + x'}{2} = x_H \\ \dfrac{y_o + y'}{2} = y_H \\ \dfrac{z_o + z'}{2} = z_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x'}{2} = \dfrac{17}{14} \\ \dfrac{1 + y'}{2} = \dfrac{13}{14} \\ \dfrac{-1 + z'}{2} = -\dfrac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{10}{7} \\ y' = \dfrac{6}{7} \\ z = -\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

Vậy $M'\left(\dfrac{10}{7};\ \dfrac{6}{7};\ -\dfrac{5}{7}\right)$.

**Ví dụ 12:** Cho hai điểm A(0; 0; –3), B(2; 0; –1) và mặt phẳng (P) $3x - 8y + 7z - 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P)

b) Tìm toạ độ điểm C nằm trên mp(P) sao cho ABC là tam giác đều.

### Giải

a) Gọi $I(x; y; z) \Rightarrow \overline{AB} = (2; 0; 2)$, $\overline{AI} = (x; y; z + 3)$

Vì $\overline{AI}$ và $\overline{AB}$ cùng phương nên có một số k sao cho $\overline{AI} = k\overline{AB}$ hay

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 0 \\ z + 3 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Mặt khác $I \in (P) \Rightarrow 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Vậy ta có hệ:

ABC

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right)$$

b) Ta có $AB = 2\sqrt{2}$, gọi điểm C(x; y; z)

Ta có $\begin{cases} CA = 2\sqrt{2} \\ CB = 2\sqrt{2} \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải ra có hai điểm: $C(2; -2; -3)$, $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

**Ví dụ 13**: Cho ba mặt phẳng (P): $x + y + z - 6 = 0$

(Q): $mx - 2y + z + m - 1 = 0$

(R): $mx + (m-1)y - z + 2m = 0$

Xác định giá trị m để ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau. Tìm giao điểm chung của cả ba mặt phẳng.

**Giải**

Vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt là:

$\overline{n_P} = (1; 1; 1)$, $\overline{n_Q} = (m; -2; 1)$, $\overline{n_R} = (m; m-1; -1)$

Điều kiện ba mặt phẳng đôi một vuông góc

$$\begin{cases} \overline{n_P}.\overline{n_Q} = 0 \\ \overline{n_P}.\overline{n_R} = 0 \\ \overline{n_Q}.\overline{n_R} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 + 1 = 0 \\ m + m - 1 - 1 = 0 \\ m^2 - 2m + 2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 1 \\ (m-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Gọi I(x; y; z) là giao điểm chung của cả ba mặt phẳng. Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ:

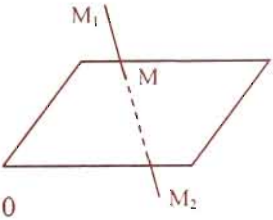
$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow I(1;\ 2;\ 3)$$

**Ví dụ 14**: Cho hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$. Chứng minh rằng hai điểm $M_1$, $M_2$ nằm về hai phía của mặt phẳng (P) khi và chỉ khi:

$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D).(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$.

### Giải

Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là giao điểm của đường thẳng $M_1M_2$ với mặt phẳng (P) và t là tỉ số mà điểm M chia đoạn thẳng $M_1M_2$, tức là $\overline{MM_1} = t\overline{MM_2}$ Khi đó



$$x_M = \frac{x_1 - tx_2}{1 - t}, \ y_M = \frac{y_1 - ty_2}{1 - t} \ ; \ z_M = \frac{z_1 - tz_2}{1 - t}$$

Vì điểm $M \in (P)$ nên:

$$A\left(\frac{x_1 - tx_2}{1 - t}\right) + B\left(\frac{y_1 - ty_2}{1 - t}\right) + C\left(\frac{z_1 - tz_2}{1 - t}\right) + D = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}$$

Để ý: $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \neq 0$ vì $M_2 \notin (P)$

Hai điểm $M_1$, $M_2$ nằm về hai phía của mặt phẳng (P) khi và chỉ khi hai vectơ $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_2}$ ngược hướng $\Leftrightarrow t < 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} < 0$$

$\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D).(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$

**Ví dụ 15:** Ta gọi chùm mặt phẳng là tập hợp các mặt phẳng cùng đi qua một đường thẳng. Chứng minh rằng chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng cắt nhau:

$(P_1)$: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$(P_2)$: $A_2x + B_2y + C_1z + D_2 = 0$.

có phương trình dạng:

$p(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ trong đó p và q không đồng thời bằng 0.

Áp dụng: Lập phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ và

a) Đi qua M(1; 2; 3).

b) Vuông góc với mặt phẳng $7x - y + 4z - 3 = 0$.

### Giải

Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_1)$ và $(P_2)$ như vậy Δ chứa các giao tuyến của điểm có toạ độ thoả mãn:

$(P_1)$: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (1)

$(P_2)$: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (2)

Ta chứng minh rằng phương trình có dạng:

$p(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ (3)

trong đó p và q không đồng thời bằng 0 là phương trình của một mặt phẳng đi qua đường thẳng Δ.

Nếu $p = 0$, $q \neq 0$ ta có phương trình của mặt phẳng $(P_2)$ và nếu $p \neq 0$, $q = 0$ ta có phương trình mặt phẳng $(P_1)$.

ABC

Nếu $p \neq 0$, $q \neq 0$ thì phương trình (3):

$$(pA_1 + qA_2)x + (pB_1 + qB_2)y + (pC_1 + qC_2)z + pD_1 + qD_2 = 0 \quad (3').$$

Giả sử các hệ số của x, y, z trong phương trình (3') đồng thời bằng 0 thì:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = -\frac{q}{p} \Rightarrow (P_1) \mathbin{//} (P_2)\text{: Vô lý.}$$

Vậy phương trình (3') là phương trình của một mặt phẳng chứa Δ.

Đảo lại, giả sử mặt phẳng $(P_3)$ của chùm có dạng:

$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ đi qua đường thẳng Δ xác định bởi (1) và (2).

Gọi $\overrightarrow{n_1}$ $\overrightarrow{n_2}$ $\overrightarrow{n_3}$ lần lượt là các pháp vectơ là $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$. Các pháp vectơ này đều vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nên ba vectơ $\overrightarrow{n_1}$ $\overrightarrow{n_2}$ $\overrightarrow{n_3}$ đồng phẳng trong đó $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương. Giả sử $\vec{n}_3 = p\overrightarrow{n_1} + q\overrightarrow{n_2}$ trong đó p và q không đồng thời bằng 0.

Ta suy ra: $A_3 = pA_1 + qA_2$ $B_3 = pB_1 + qB_2$ $C_3 = pC_1 + qC_2$.

Do đó phương trình của mặt phẳng $(P_3)$ có thể viết:

$$(pA_1 + qA_2)x + (pB_1 + qB_2)y + (pC_1 + qC_2)z + D_3 = 0 \ (4)$$

So sánh (3') và (4) ta suy ra $D_3 = pD_1 + qD_2$.

Thay $D_3 = pD_1 + qD_2$ vào (4) ta có (3') và đưa (3') về dạng (3) nghĩa là $(P_3)$ có phương trình:

$p(A_1x + B_2y + C_1z + D_1) + q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ trong đó p và q không đồng thời bằng 0.

Áp dụng: Phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng:

$p(2x - z) + q(x + y - z + 5) = 0$ hay $(2p + q)x + qy - (p + q)z + 5q = 0$.

a) Qua M(1; 2; 3) nên $2p + q + 2q - 3p - 3q + 5q = 0 \Leftrightarrow -p + 5q = 0$

Chọn p = 5 và q = 1 thì phương mặt phẳng cần tìm: $11x + y - 6z + 5 = 0$.

b) Mặt phẳng $7x - y + 4z - 3 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (7; -1; 4)$

Mặt phẳng cần tìm có VTPT $\vec{n}' = (2p + q; q; -(p + q))$.

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng này vuông góc với nhau là $\vec{n}.\vec{n}' = 0$.

$\Leftrightarrow 7.(2p + q) - 1 \quad q - 4(p + q) = 0 \Leftrightarrow 10p + 2q = 0 \Leftrightarrow 5p + q = 0$.

Chọn p = 1, q = –5 ta được phương trình của mặt phẳng cần tìm:

$3x + 5y - 4z + 25 = 0$.

**Ví dụ 16:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm chia các đoạn thẳng AB, D'D và B'C' theo cùng tỉ số $k \neq 0, 1$. Chứng minh rằng mp(MNP) luôn luôn song song với mp(AB'D').

**Giải**

Đặt A'B' = a, A'D' = b, A'A' = c. Ta dùng phương pháp toạ độ bằng cách chọn hệ trục toạ độ với gốc là: A'(0; 0; 0) sao cho B'(a; 0; 0), D'(0; b; 0) và A(0; 0; c)

Khi đó ta có C'(a; b; 0), B(a; 0; c), D(0; b; c) và C(a; b; c). Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, D'D, B'C' theo cùng tỷ số k nên:

$$M\left(-\frac{ka}{1-k};0\;;c\right)\quad N\left(0\;;b;\frac{-kc}{1-k}\right),\;P\left(a;\;\frac{-kb}{1-k};0\right)$$

Do đó $\overline{MN}=\left(\frac{ka}{1-k};b\;;-\frac{1}{1-k}c\right)$, $\overline{NP}=\left(a;\frac{-1}{1-k}b\;;\frac{kc}{1-k}\right)$.

Ta có: $\left[\overline{MN},\overline{NP}\right]=\left(\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}bc\;;\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}ca;\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}ab\right)$

nên mp(MNP) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(bc;ca;ab)$

Mặt phẳng (AB'D') có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ có vectơ pháp tuyến

là $\vec{n}'=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

Vì $\frac{bc}{\frac{1}{a}}=\frac{ca}{\frac{1}{b}}=\frac{ab}{\frac{1}{c}}=abc$ và M, N, P $\notin$ (AB'D') do $k\neq 0$ nên

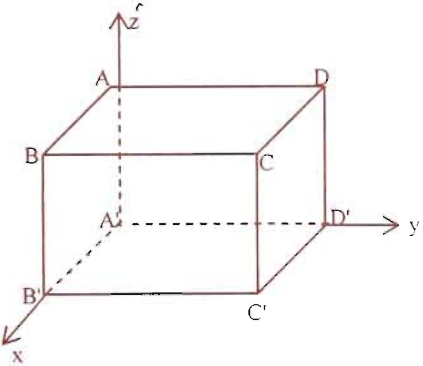
mp(MNP) // mp(AB'D').

**Ví dụ 17**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a chứng minh:

a) Hai mặt phẳng (AB'D') và (BC'D) song song với nhau.

b) Đường chéo A'C vuông góc với hai mặt phẳng nói trên.

**Giải**



Chọn A' làm gốc toạ độ và B'(a; 0; 0), D'(0; a; 0), A(0; 0; a). Ta tính được toạ độ các đỉnh còn lại của hình lập phương.

a) Mặt phẳng (AB'D') có phương trình:

$$x+y+z-1=0$$

Mặt phẳng (BC'D) có phương trình:

$$x+y+z-2=0.$$

Hai mặt phẳng này song song với nhau vì $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{-2}$

b) Ta có $\overline{A'C}=(a;a;a)$.

Vectơ này cũng là VTPT của hai mặt phẳng song song nói trên nên đường chéo AC' vuông góc với 2 mp(AB'D'), (BC'D).

ABC

## DẠNG 3: GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

**Góc giữa 2 mặt phẳng:** mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'$ thì $\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')|$

**Chú ý:** – Góc giữa 2 vectơ từ $0^\circ$ đến $180^\circ$ và các góc còn lại giữa đường thẳng, mặt phẳng đều từ $0^\circ$ đến $90^\circ$

– Góc giữa 2 vectơ $\vec{u} = (x, y, z)$ và $\vec{v} = (x', y', z')$ :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

**Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:**

– (Oxy) là $|z_0|$

– (Oyz) là $|x_0|$

– (Ozx) là $|y_0|$

– (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ là: $d(M_0, P) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

**Chú ý:**

– Đường cao của tứ diện là khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng đối diện.

– Ta có thể tìm chân hình chiếu của một điểm lên đường thẳng, mặt phẳng để đưa về khoảng cách giữa 2 điểm.

**Ví dụ 1**: Tìm khoảng cách từ:

a) Điểm A(–2; –4; 3) đến mặt phẳng $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b) Điểm B(2; –1; –1) đến mặt phẳng $16x - 12y - 15z - 4 = 0$.

c) Điểm C(4; 2; –2) đến mặt phẳng $12y - 5z + 5 = 0$.

**Giải**

a) $d(A; (P)) = \dfrac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|-4 + 4 + 6 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{3}{3} = 1.$

b) $d(B; (P)) = \dfrac{|32 + 12 + 15 - 4|}{\sqrt{256 + 144 + 225}} = \dfrac{55}{25} = \dfrac{11}{5}$

c) $d(C; (P)) = \dfrac{|24 + 10 + 5|}{\sqrt{144 + 25}} = \dfrac{39}{13} = 3.$

**Ví dụ 2**: Tính khoảng cách từ M(–8; 7; 6) đến:

a) Các mặt phẳng toạ độ

b) Các mặt phẳng (P): $x = 2$, (Q); $y = -1$, (R): $z = 4$.

**Giải**

a) $d(M, (Oxy)) = |z_M| = 6$

$d(M, (Oyz)) = |x_M| = 8$

$d(M, (Ozx)) = |y_M| = 7.$

b) (P): $x - 2 = 0$ nên $d(M, (P)) = |x_M - 2| = 10$

(Q): $y + 1 = 0$ nên $d(M, (Q)) = |y_M + 1| = 8$

(R): $z - 4 = 0$ nên $d(M, (R)) = |z_M - 4| = 2.$

**Ví dụ 3:** Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:

a) (P): $4x - y + 3z - 9 = 0$, (Q): $4x - y + 3z + 1 = 0$

b) (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và $Ax + By + Cz + D' = 0$, $D \neq D'$.

**Giải**

a) Lấy điểm A trên (P): $4x - y + 3y - 9 = 0$

Cho $x = 0$ , $y = 0$ thì $z = 3$ nên $A(0; 0; 3)$

Do đó $d((P), (Q)) = d(A; (Q)) = \dfrac{|9 + 1|}{\sqrt{16 + 1 + 9}} = \dfrac{10}{\sqrt{26}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{13}$

b) Lấy điểm $M(x_o ; y_o ; z_o)$ nằm trên mặt phẳng (P) tức là

$Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$ hay $Ax_o + By_o + Cz_o = -D$ thì

$$d((P)), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Ví dụ 4**: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; -2; 2)$, $B(-3; 1; 0)$, $C(2; 0; -1)$. Tính khoảng cách từ gốc O đến mp(ABC).

**Giải**

Mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-5; -14; -11)$ nên có phương trình: $-5(x - 1) - 14(y + 2) - 11(z - 2) = 0$

Vậy phương trình của mặt phẳng (ABC) là: $5x + 14y + 11z + 1 = 0$.

Ta có $d(O; (ABC)) = \dfrac{|1|}{\sqrt{25 + 196 + 121}} = \dfrac{1}{\sqrt{342}} = \dfrac{1}{3\sqrt{38}}$.

**Ví dụ 5**: Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh $D(4; -1; 0)$ của tứ diện ABCD biết $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 0; 2)$, $C(0; 1; -3)$.

**Giải**

Chiều dài đường cao DH của tứ diện ABCD là khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC).

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1;0; -4)$ nên $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ là VTPT của (ABC)

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $4x - 13y - z + 10 = 0$

$$DH = d(D; (ABC)) = \frac{|4.4 - 13.(-1) - 0 + 10|}{\sqrt{16 + 169 + 1}} = \frac{39}{\sqrt{186}}$$

**Ví dụ 6**: Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau:

a) M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mặt phẳng $2x + 3y + z - 17 = 0$

b) M cách đều hai mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z + 5 = 0$.

**Giải**

Ta có $M \in Oz$ nên $M(0; 0; c)$

a) $MA = d(M; (P)) \Leftrightarrow \sqrt{4 + 9 + (4 - c)^2} = \dfrac{|c - 17|}{\sqrt{4 + 9 + 1}}$

$\Leftrightarrow 13 + (4 - c)^2 = \dfrac{(c - 17)^2}{14} \Leftrightarrow 182 + 14(4 - c)^2 = (c - 17)^2$

Từ đó giải ra $c = 3$. Vậy $M(0; 0; 3)$.

ABC

b) Điểm M cách đều hai mặt phẳng đã cho nên $\frac{|-c+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|c+5|}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |-c + 1| = |c + 5|$

$\Leftrightarrow -c + 1 = c + 5$ hoặc $-c + 1 = -c - 5$

$\Leftrightarrow c = -2$. Vậy M(0; 0; −2).

**Ví dụ 7**: Hãy xác định góc φ tạo thành bởi các cặp mặt phẳng sau:

a) $x - \sqrt{2}y + z - 4 = 0$ và $x + \sqrt{2}y - z + 5 = 0$

b) $3y - z - 9 = 0$ và $2y + z = 0$.

**Giải**

a) Hai mặt phẳng có VTPT $\vec{n} = (1; -\sqrt{2}; 1)$, $\vec{n}' = (1; \sqrt{2}; -1)$

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+2+1}.\sqrt{1+2+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^o$$

b) Hai mặt phẳng có VTPT $\vec{n} = (0; 3; -1)$, $\vec{n}' = (0; 2; 1)$

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|6-1|}{\sqrt{9+1}.\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^o$$

**Ví dụ 8**: Cho mặt phẳng (P): $2x - y + z - 17 = 0$ và mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm B(1; −2; 1), C(1; 0; 0), D(0; 1; 0). Tính góc tạo thành bởi hai mặt phẳng đó.

**Giải**

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (2; -1; 1)$

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}' = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (1; 1; 2)$

Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng thì:

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^o$$

**Ví dụ 9**: Mặt phẳng (β) nhận điểm P(2; −1; −2) là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ ở trên mặt phẳng đó. Hãy tính góc giữa mặt phẳng (β) và mặt phẳng (γ) có phương trình $x - y - 6 = 0$.

**Giải**

Mặt phẳng (β) đi qua P(2; −1; −2) và nhận $\overrightarrow{OP} = (2; -1; -2)$ làm VTPT nên phương trình tổng quát của (β) là: $2x - y - 2z - 9 = 0$.

Gọi φ là góc giữa (β) và (γ), ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|2.1+1.1|}{\sqrt{4+1+4}.\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^o$$

**Ví dụ 10:** Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc O, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b), (a > 0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC'.

a) Tính thể tích khối tứ diện BDA'M.

b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để mặt phẳng (A'BD) ⊥ (MBD).

ABC

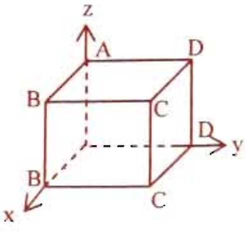
### Giải

a) Từ giả thiết ta có: C(a; a; 0), C'(a; a; b) $\Rightarrow$ M(a; a; $\frac{b}{2}$)

Nên $\overline{BD}$ = (–a; a; 0), $\overline{BM}$ = (0; a; $\frac{b}{2}$), $\overline{BA'}$ = (–a; 0; b)

$\Rightarrow \left[\overline{BD}, \overline{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2};\ \frac{ab}{2};\ -a^2\right)$

Do đó: $V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left|\left[\overline{BD}, \overline{BM}\right].\overline{BA'}\right| = \frac{a^2b}{4}$



b) Mặt phẳng (BDM) có vectơ pháp tuyến là:

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overline{BD}, \overline{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

mặt phẳng (A'BD) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_2} = \left[\overline{BD}, \overline{BA'}\right] = \left(ab;\ ab;\ a^2\right)$

Do đó (BDM) $\perp$ (A'BD) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0$

$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1.$

**Ví dụ 11:** Cho A(1; 0; 0), B(0; 1; 2). Tìm C $\in$ Oz để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng ($\alpha$): 2x – 2y – z +5 = 0 một góc bằng $60^0$

### Giải

Gọi C(0; 0; m) $\in$ Oz. Ta có: $\overline{AB}$ = (–1; 1; 2), $\overline{AC}$ = (–1; 0; m)

$\Rightarrow$ u = $\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]$ = (m; m – 2; 1) là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Mặt phẳng ($\alpha$) có vectơ pháp tuyến $\overline{n}$ = (2; –2; –1).

Mp(ABC) và ($\alpha$) hợp nhau góc $60^0$ nên:

$$\cos 60^0 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|2m + 4 - 2m - 1|}{3\sqrt{m^2 + 1 + (m-2)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Vậy có hai điểm C(0; 0; $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$), C'(0; 0; $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$).

**Ví dụ 12**: Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD có A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)

a) Tìm cosin của góc tạo bởi hai mặt (ABC) và (ABD).

b) Tìm khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

### Giải

a) Ta có $\overline{AB}$ = (–4; 5; –1), $\overline{AC}$ = (0; –1; 1), $\overline{AD}$ = (–1; –1; 3)

Mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n}$ = [$\overline{AB}$, $\overline{AC}$] = (4; 4; 4) hay (1; 1; 1).

Mặt phẳng (ABD) có VTPT $\vec{n}'$ = [$\overline{AB}$, $\overline{AD}$] = (14; 13; 9)

Ta có $\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}, \vec{n}')\right| = \frac{|1.14 + 1.13 + 1.9|}{\sqrt{3}.\sqrt{196 + 169 + 81}} = \frac{36}{\sqrt{1338}}$.

ABC

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A(5; 1; 3) và có VTPT $\vec{n}' = (1; 1; 1)$.
Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) là:

$$1(x-5) + 1(y-1) + 1(z-3) = 0 \Rightarrow x + y + z - 9 = 0.$$

Do đó: $d(D; (ABC)) = \dfrac{|4+6-9|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

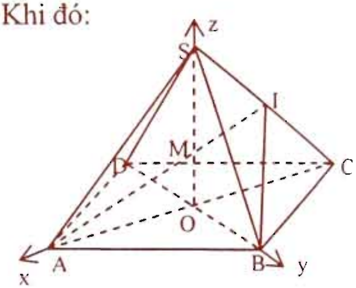
**Ví dụ 13**: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI).

### Giải

Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, trục Ox chứa OA, trục Oy chứa OB, trục Oz chứa SO. Khi đó:

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\ ;0\right), B\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\ ;0\right), S(0; 0; h)$$



Ta có giao điểm M của SO và AI là trọng tâm tam giác SAC nên $M\left(0;\ 0\ ;\dfrac{h}{3}\right)$.

Mặt phẳng đi qua A, B, I cũng chính là mặt phẳng (ABM) nên có phương trình là: $\dfrac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \dfrac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \dfrac{z}{\frac{h}{3}} = 1$.

Do đó, khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABM) là:

$$d = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{9}{h^2}}} = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$$

**Ví dụ 14**: Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB, OBC, OCA là những tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Chứng minh:

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn.

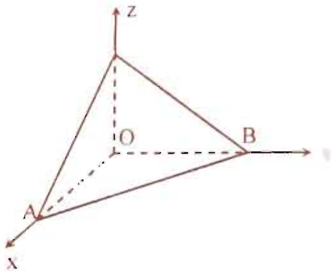
b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

### Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với các tia Ox, Oy, Oz lần lượt là các tia OA, OB, OC. Khi đó ta có A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a > 0, b > 0, c > 0.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$.
Vậy góc A của tam giác ABC là góc nhọn.
Chứng minh tương tự, ta có các góc B và C của tam giác đó cũng nhọn.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$.



Mặt phẳng (OBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{i} = (1; 0; 0)$. Ta có

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}|.|\vec{i}|}\right)^2 = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Tương tự: $\cos^2\beta = \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

$$\cos^2\gamma = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Ví dụ 15**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Trên các tia AA', AB, AD, lần lượt lấy các điểm M, N, P khác A sao cho AM = m, AN = n và AP = p.

a) Tìm sự liên hệ giữa m, n và p sao cho mp(MNP) đi qua đỉnh C' của hình lập phương.

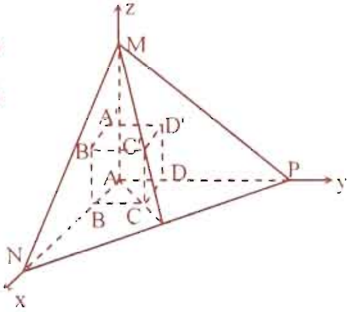
b) Trong trường hợp mp(MNP) luôn đi qua C', hãy tìm thể tích bé nhất của tứ diện AMNP.

### Giải

Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho O trùng A, các tia Ox, Oy và Oz lần lượt chứa các điểm B, D và A'.

Khi đó ta có A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1), C'(1; 1; 1), M(0; 0; m), N(n; 0; 0), P(0; p; 0).

a) Mặt phẳng (MNP) có phương trình theo đoạn chắn $\frac{x}{n} + \frac{y}{p} + \frac{z}{m} = 1$ nên mặt phẳng đó đi qua đỉnh C' khi và chỉ khi: $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = 1$



b) Thể tích tứ diện AMNP là:

$$V = \frac{1}{6}AM.AN.AP = \frac{1}{6}mnp.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Rightarrow 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Rightarrow \frac{1}{mnp} \leq \frac{1}{3^3} \Rightarrow mnp \geq 27$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} = \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$, tức là m = n = p = 3.

ABC

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích V là $\frac{27}{6}$, khi đó A.MNP là hình chóp đều.

**Ví dụ 16**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Các điểm M thuộc AD' và N thuộc DB sao cho $AM = DN = k\ (0 < k < a\sqrt{2})$.

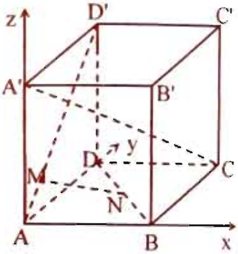
a) Chứng minh rằng MN luôn song song với mặt phẳng (A'D'BC).

b) Tìm k để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

c) Khi đoạn thẳng MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB; MN song song với A'C.

**Giải**

Chọn hệ toạ độ Oxyz như hình vẽ. Ta có:



$$AM = k \Rightarrow \overline{MA} = \frac{k}{k - a\sqrt{2}}\overline{MD}' \Rightarrow M\left(0; \frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

$$DN = k \Rightarrow \overline{ND} = \frac{k}{k - a\sqrt{2}}\overline{NB} \Rightarrow N\left(\frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2} - k}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

a) Mặt phẳng (A'D'BC) có phương trình: $x + z - a = 0$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; 1)$. Ta có:

$\overline{MN}\vec{n} = \frac{k}{\sqrt{2}}.1 + \frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}.0 + \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right).1 = 0$ và $M \notin$ (A'D'BC) nên đường thẳng MN song song với mặt phẳng (A'D'BC).

b) Ta có: $MN^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - 0\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2} - k}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(0 - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= 3k^2 - 2a\sqrt{2}k + a^2 = 3\left(k - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} \geq \frac{a^2}{3}$$

Vậy đoạn MN bé nhất khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

c) Khi MN ngắn nhất thì $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ nên $\overline{MN} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; -\frac{a}{3}\right)$

$$\overline{MN}.\overline{AD'} = \frac{a}{3}.0 + \frac{a}{3}.a - \frac{a}{3}.a = 0 \Rightarrow MN \perp AD'$$

$$\overline{MN}.\overline{DB} = \frac{a}{3}.a + \frac{a}{3}.(-a) + \left(-\frac{a}{3}\right).0 = 0 \Rightarrow MN \perp DB.$$

Suy ra đường thẳng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB.

Ta có $\overline{A'C} = (a; a; -a) = 3\overline{MN}$ và A' không thuộc đường thẳng MN suy ra đường thẳng MN song song với đường thẳng A'C.

**Ví dụ 17:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật AB = a, $AD = a\sqrt{2}$, SA = a, SA vuông góc (ABCD). Gọi M, N là trung điểm AD, SC, gọi I là giao điểm BM và AC. Chứng minh (SAC) ⊥ (SMB) và tính thể tích khối ANIB.

ABC

### Giải

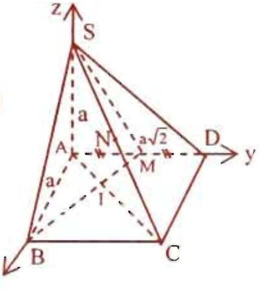
Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

S(0; 0; a), A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; $a\sqrt{2}$; 0) thì:

D(0; $a\sqrt{2}$; 0), M(0; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 0), N($\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{2}$)

Vì $\frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IA = \frac{1}{3}AC$

$\Rightarrow$ I ($\frac{a}{3}$; $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; 0) $\overrightarrow{BM}(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0)$ $\overrightarrow{BS}(-a; 0; a)$



Mặt phẳng (SBM) có vectơ pháp tuyến:

$$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$$

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến :

$$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}\right] = (-a^2\sqrt{2}\ ; a^2 ; 0)$$

Vì $\overrightarrow{n_1}\ \overrightarrow{n_2} = 0$ nên 2 mặt phẳng (SAC), (SMB) vuông góc.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(-\frac{a^2}{3\sqrt{2}}; \frac{a^2}{6}; 0\right)$ $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$

$$V_{ANIB} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AB}\right| = \frac{a^3.\sqrt{2}}{36}.$$

## DẠNG 4: MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU

**Phương trình tổng quát của mặt phẳng:**

Mặt phẳng qua $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$

$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

hay $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

**Phương trình mặt cầu:** (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ hay:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$

có tâm I(–A, –B, –C) và bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

**Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:**

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ là $d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

**Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:**

Cho mặt cầu S(I; R) và mp(P). Gọi IH = d là khoảng cách từ tâm I đến (P) thì:

a) Nếu d < R: mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến có tâm H là hình chiếu của tâm I lên mp(P), bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Đặt biệt, khi d = 0 thì mp(P) đi qua tâm I của mặt cầu, giao tuyến là đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính R.

b) Nếu d = R, mp(P) và mặt cầu S(I; R) có điểm chung duy nhất là H. Khi đó mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H hoặc mp(P) là tiếp diện của mặt cầu tại tiếp điểm H.

c) Nếu d > R: mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.

**Phương trình đường tròn giao tuyến**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 1:** Lập phương trình mặt cầu:

a) Có tâm I(–2; 1; 1) và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

b) Có tâm thuộc trục Oy và tiếp xúc với hai mặt phẳng:
$x + 2y - 2z - 3 = 0$, $x + 2y - 2z - 5 = 0$.

**Giải**

a) Theo giả thiết thì R = d(I, (P)) = 1 nên phương trình mặt cầu:
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

b) Gọi I(0; y; 0) thuộc Oy. Ta có d(I, (P)) = d(I, (Q))

$$\Leftrightarrow \frac{|2y-3|}{\sqrt{9}} = \frac{|2y-5|}{\sqrt{9}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y - 3 = 2y - 5 \\ 2y - 3 = -(2y - 5) \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2.$$

Vậy I(0; 2; 0). Bán kính $R = d(I; (P)) = \frac{1}{3}$ nên phương trình mặt cầu là:

$$x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \frac{1}{9}$$

**Ví dụ 2:** Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

**Giải**

I(x; y; z) là tâm mặt cầu cần tìm ⇔ I ∈ (P) và IA = IB = IC

Ta có: $IA^2 = (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2$; $IB^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$

$IC^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$ Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó I(1; 0; 1) và bán kính R = IA = 1

Vậy phương trình mặt cầu là $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

**Ví dụ 3**: Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) trong các trường hợp dưới đây:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z + 5 = 0$ và $x + 2y + z - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$ và $x + 2y + 2z = 0$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 2z - 4 = 0$ và $x + y - z - 10 = 0$.

**Giải**

a) Mặt cầu có tâm $I(3; -1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 3$
khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P):

$$d(I, (P)) = \frac{|3 - 2 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} < R$$

Vậy mặt phẳng cắt mặt cầu.

b) Mặt cầu có tâm $I(3; -1; 1)$ và $R = 1$. Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P):

$$d(I, (P)) = \frac{|3 - 2 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1 = R$$

Vậy mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

c) Mặt cầu có tâm $I(-2; -4; 1)$, $R = \sqrt{5}$. Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P):

$$d(I, (P)) = \frac{|-2 - 4 - 1 - 10|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{17}{\sqrt{3}} > R$$

Vậy mặt phẳng không cắt mặt cầu.

**Ví dụ 4**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho mặt phẳng và mặt cầu lần lượt có phương trình: (P): $y + z - 1 = 0$; (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$.
Chứng tỏ rằng mp(P) và mặt cầu (S) cắt nhau. Xác định toạ độ tâm của đường tròn giao tuyến (C) và tính bán kính của nó.

**Giải**

Tâm I của mặt cầu (S) là $I(0; 0; 1)$ bán kính là $R = 1$.

Ta có: $d(I, (P)) = \dfrac{|0 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0 < R$.

Vậy mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau và vì tâm I thuộc mp(P) nên mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn có tâm cũng là tâm mặt cầu (S) là $I(0; 0; 1)$ và có cùng bán kính với (S) là $R = 1$.

**Ví dụ 5**: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 & (S) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (\alpha) \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi mặt cầu đi qua đường tròn (C) có phương trình dạng:
$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d) + \mu(Ax + By + Cz + D) = 0$, $\lambda \neq 0$ (*).
Áp dụng: Lập phương trình của mặt cầu đi qua điểm $M(0; 0; 3)$ và đi qua đường tròn có phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 = 0 \\ 2x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$

**Giải**

Giả sử (S') là mặt cầu qua đường tròn (C).

Ta lấy một điểm $M(x_o; y_o; z_o) \in (S')$, $M_o \notin (C)$.

Nếu $M_o \in (S)$ và $M_o \notin (\alpha)$ ta chọn $\lambda = 1$, $\mu = 0$ thì khi đó $(S') \equiv (S)$ nên phương trình của (S') có dạng (*).

Nếu $M_o \notin (S)$, ta chọn $\lambda = Ax_o + By_o + Cz_o + D$,

$\mu = -\left(x_o^2 + y_o^2 + 2ax_o + 2by_o + 2cz_o + d\right) \neq 0$. Khi đó (S') có phương trình dạng (*) với λ và μ được chọn như trên.

Ngược lại rõ ràng phương trình dạng (*) là phương trình của mặt cầu qua đường tròn (C).

Áp dụng: xét mặt cầu đi qua đường tròn đã cho:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 + m(2x + 2y - z + 4) = 0$$

Cho mặt cầu đi qua M(0; 0; 3) thì m = 43.

Thế vào thì có mặt cầu cần tìm: $x^2 + y^2 + z^2 + 88x + 82y - 47z + 132 = 0$.

**Ví dụ 6:** Tìm điều kiện để hai mặt cầu có phương trình:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ và $(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 = R'^2$ cắt nhau. Chứng tỏ rằng khi hai mặt cầu có hơn một điểm chung thì giao tuyến của chúng là một đường tròn.

**Giải**

Hai mặt cầu có tâm I(a; b; c), I'(a', b', c').

Điều kiện để hai mặt cầu cắt nhau là: $|R - R'| < II' < R + R'$.

$$\Leftrightarrow |R - R'| < \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2} < R + R'$$

Khi hai mặt cầu có nhiều hơn một điểm chung thì tập hợp các điểm chung sẽ có toạ độ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \\ (x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 = R'^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ 2(a-a')x + 2(b-b')y + 2(c-c')z + a'^2 + b'^2 + c'^2 - R'^2 - a^2 - b^2 - c^2 + R^2 = 0\end{cases}$$

Đó là phương trình của một đường tròn.

**Ví dụ 7:** Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu:

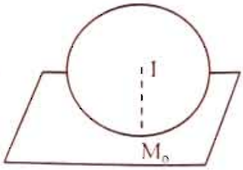
$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ tại điểm $M_0(4; 3; 0)$.

**Giải**

Tâm của mặt cầu là I(3; 1; −2).

Ta có điểm $M_0(4; 3; 0)$ thuộc mặt cầu.

Tiếp diện tại $M_o$ có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{M_oI} = (-1; -2; -2)$.



Phương trình tiếp diện

$$-1(x - 4) - 2(y - 3) - 2(z - 0) = 0$$

hay $x + 2y + 2z - 10 = 0$.

**Ví dụ 8:** Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.

**Giải**

Mặt cầu đã cho có tâm là I(1; 2; 3) và có bán kính

$$R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$$

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có phương trình: $4x + 3y - 12z + D = 0$ với $D \neq 1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 + 6 - 36 + D|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = 4$$

$\Leftrightarrow |-26 + D| = 52 \Leftrightarrow -26 + D = \pm 52 \Leftrightarrow D = 78$ hoặc $D = -26$ (chọn).

Vậy có hai mặt phẳng thoả mãn yêu cầu là:

$$4x + 3y - 12z + 78 = 0 \text{ và } 4x + 3y - 12z - 26 = 0.$$

**Ví dụ 9**: Trong không gian có hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A, B, C, D có toạ độ xác định bởi các hệ thức:

$\overline{OA} = -2\overline{j}$, $\overline{OB} = \sqrt{3}\overline{i} + \overline{j}$ $\overline{OC} = -\sqrt{3}\overline{i} + \overline{j}$. $\overline{OD} = 2\sqrt{2}\overline{k}$

a) Chứng minh rằng: ABCD là tứ diện đều. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D. Viết phương trình tiếp diện $(\alpha)$ của mặt cầu (S) song song với mặt phẳng (ABD).

**Giải**

Theo đề bài ta có $A(0; -2; 0)$, $B(\sqrt{3}; 1; 0)$, $C(-\sqrt{3}; 1; 0)$, $D(0; 0; 2\sqrt{2})$.

a) Ta có $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$; $BC = 2\sqrt{3}$.

Vậy ABCD là tứ diện đều.

Ta có $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (0; 0; 6\sqrt{3})$ nên thể tích khối tứ diện ABCD:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overline{AB}.\overline{AC}].\overline{AD}\right| = 2\sqrt{6}.$$

b) Phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt cầu, nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 4 - 4b + d = 0 \\ 4 + 2\sqrt{3}a + 2b + d = 0 \\ 4 - 2\sqrt{3}a + 2b + d = 0 \\ 8 + 4\sqrt{2}c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ d = -4 \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}z - 4 = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0; 0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Phương trình của mặt phẳng (ABD) là: $3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{3}z - 2\sqrt{6} = 0$.

Phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABD) có dạng

$3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{3}z + D = 0$ $(D \neq -2\sqrt{6})$. Mặt phẳng đó có tiếp diện của mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ I đến mặt phẳng đó bằng R:

ABC

$$\frac{\left|\sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}+D\right|}{\sqrt{18+6+3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow D = 4\sqrt{6} \text{ hay } D = -5\sqrt{6} \text{ (chọn)}.$$

Vậy có hai tiếp diện của mặt cầu (S) cần tìm là:

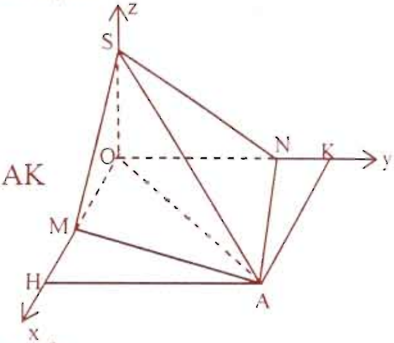
$3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{3}z + 4\sqrt{6} = 0$ và $3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{3}z - 5\sqrt{6} = 0$.

**Ví dụ 10:** Cho hai điểm S(0; 0; 1), A(1; 1; 0), hai điểm thay đổi M(m; 0; 0), N(0; n; 0) sao cho m + n = 1, m > 0, n > 0.

a) Chứng minh thể tích V của hình chóp S.OMAN không phụ thuộc vào m và n.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

### Giải



a) Hình chóp S.OMAN có chiều cao SO = 1 không đổi, tứ giác đáy nằm trong mặt phẳng Oxy có diện tích:

$$S = S_{AOM} + S_{AON} = \frac{1}{2}OM.AH + \frac{1}{2}ON.AK$$

$$= \frac{1}{2}(m+n) = \frac{1}{2} \text{: không đổi.}$$

b) Phương trình mặt phẳng (SMN) là

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow nx + my + mnz - mn = 0.$$

Vì m + n = 1 nên ta có: $d(A, (SMN)) = \frac{|n.1 + m.1 + 0 - mn|}{\sqrt{n^2 + m^2 + m^2.n^2}} = 1$ : không đổi.

Vậy (SMN) tiếp xúc với mặt cầu tâm A, bán kính R = 1.

**Ví dụ 11**: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho các điểm A(1; 5; 3), B(4; 2; –5), C(5; 5; –1) và D(1; 2; 4).

a) Chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm đó.

b) Tìm khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC).

c) Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với CD và tiếp xúc với mặt cầu (S).

d) Tìm bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ.

### Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -3; -8)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 0; -4)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -3; 1)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\ \overrightarrow{AD} = 72 \neq 0$.

Suy ra bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có:

$$\begin{cases} 1+25+9+2a+10b+6c+d=0\\ 16+4+25+8a+4b-10c+d=0\\ 25+25+1+10a+10b-2c+d=0\\ 1+4+16+2a+4b+8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+3b+8c=5\\ -a \qquad\quad +c=2\\ \qquad 3b-c=-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1\\ b=-2\\ c=1\\ d=-19 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{1+4+1+19} = 5$

b) mp(ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12)$ hay $(3; -5; 3)$ và đi qua điểm $A(1; 5; 3)$ nên có phương trình:

$3(x - 1) - 5(y - 5) + 3(z - 3) = 0$ hay $3x - 5y + 3z + 13 = 0$.

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC):

$$h = \frac{|3.1 - 5.2 + 3.4 + 13|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{43}}.$$

c) Mặt phẳng $(\alpha)$ vuông góc với CD có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD} = (-4; -3; 5)$ nên có phương trình: $-4x - 3y + 5z + d = 0$.

Mặt phẳng đó tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm $I(1; 2; -1)$ của mặt cầu (S) tới mặt phẳng $(\alpha)$ bằng 5, tức là:

$$\frac{|-4.1 - 3.2 - 5.1 + d|}{\sqrt{16+9+25}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|-15 + d|}{\sqrt{50}} = 5 \Leftrightarrow d = 15 \pm 25\sqrt{2}.$$

Vậy ta có hai mặt phẳng cần tìm với phương trình:

$$-4x - 3y + 5z + 15 \pm 25\sqrt{2} = 0.$$

d) Tâm mặt cầu (S) là $I(1; 2; -1)$. Khoảng cách từ I tới (Oxy) là $d_1 = |-1| = 1$ nên (S) cắt mp(Oxy) theo đường tròn có bán kính:

$$r_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$$

Khoảng cách từ I tới mp(Oyz) là $d_2 = 1$ nên (S) cắt mp(Oyz) theo đường tròn có bán kính $r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$

Khoảng cách từ I tới mp(Oxz) là $d_3 = 2$ nên (S) cắt mp(Oxz) theo đường tròn có bán kính $r_3 = \sqrt{R^2 - d_3^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

**Ví dụ 12**: Cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

a) Tuỳ theo giá trị của k, hãy xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mp(P) với (P): $x + y - z + k = 0$.

b) Mặt cầu cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C, khác với gốc toạ độ O. Viết phương trình mp(ABC).

c) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B.

ABC

**Giải**

a) Mặt cầu có tâm I(1; 2; 3) và có bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Gọi d là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới mp(P) thì:

$$d = \frac{|1 + 2 - 3 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{3}}.$$ Do đó:

Nếu $\frac{|k|}{\sqrt{3}} < \sqrt{14}$ hay $|k| < \sqrt{42}$ thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn.

Nếu $|k| = \sqrt{42}$ thì (P) tiếp xúc với mặt cầu;

Nếu $|k| > \sqrt{42}$ thì (P) không cắt mặt cầu.

b) Trong phương trình mặt cầu (S):

Cho $y = z = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2 \Rightarrow A(2; 0; 0)$

Cho $z = x = 0 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = 4 \Rightarrow B(0; 4; 0)$

Cho $x = y = 0 \Rightarrow z = 0$ hoặc $z = 6 \Rightarrow C(0; 0; 6)$

Vậy phương trình mp(ABC): $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$.

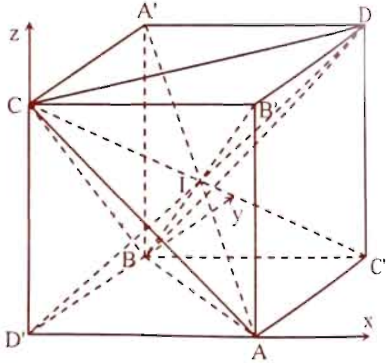
c) Mặt phẳng ($\alpha$) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm B(0; 4; 0) phải đi qua B và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IB} = (-1; 2; -3)$.

Vậy ($\alpha$) có phương trình:

$$-(x - 0) + 2(y - 4) - 3(z - 0) = 0 \text{ hay } x - 2y + 3z + 8 = 0.$$

**Ví dụ 13:** Cho tứ diện đều ABCD. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các mặt của tứ diện bằng $k^2$ cho trước.

**Giải**



Dựng hình lập phương AC'BD'.B'DA'C ngoại tiếp tứ diện đều ABCD cạnh a thì cạnh hình lập phương $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Chọn D' làm gốc toạ độ, tâm $I\left(\frac{b}{2}; \frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$

Trong hệ toạ độ này, các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện đều ABCD có phương trình lần lượt là:

mp(ABC): $x + y + z - b = 0$

mp(DBC): $-x + y + z - b = 0$

mp(DCA): $x - y + z - b = 0$

mp(DAB): $x + y - z - b = 0$.

Gọi $M(x_o; y_o; z_o)$ và $d_1, d_2, d_3, d_4$ là khoảng cách từ M đến các mặt phẳng đó.

Theo đề bài: $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = k^2$

ABC

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - b(x_o + y_o + z_o) + b^2\right] = k^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[\left(x_o - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_o - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z_o - \frac{b}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{3}b^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x_o - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_o - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z_o - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(k^2 - \frac{a^2}{6}\right)$$

Biện luận:

– Nếu $k^2 - \frac{a^2}{6} > 0 \Leftrightarrow |k| > \frac{a\sqrt{6}}{6}$ thì quỹ tích của M là mặt cầu (C), tâm I, bán kính $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{k^2 - \frac{a^2}{6}}$

– Nếu $|k| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ thì quỹ tích của M là chỉ điểm I.

– Nếu $|k| < \frac{a\sqrt{6}}{6}$ thì không tồn tại một điểm M nào.

**Ví dụ 14:** Tìm giá trị bé nhất của:

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2 + 25}$$

**Giải**

Trong không gian Oxyz, xét M(x; y; 0) và 2 điểm cố định A(1; –3; 3), B(2; –4; –5) ở khác phía với mp(Oxy).

Ta có: $f(x; y) = MA + MB \geq AB = \sqrt{66}$

Giá trị bé nhất của $f(x; y) = \sqrt{66}$ khi M là giao điểm của đoạn AB với mặt phẳng Oxy.

**Ví dụ 15:** Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} x + 2y - 2z + m = 0 & (1) \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 & (2) \end{cases}$

**Giải**

Ta có (1) là tập các điểm M(x; y; z) thuộc mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + m = 0$ và (2) là tập các điểm N(x; y; z) thuộc mặt cầu (S) tâm I(–2; 1; 1), R = 1.

Điều kiện hệ có nghiệm là: $d(I; (P)) \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2 + 2 - 2 + m|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \leq 1 \Leftrightarrow |m - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 5$$

ABC

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Lập phương trình mặt phẳng qua $M(-1, 2, 3)$, $N(2, -4, 3)$, $P(4, 5, 6)$

**ĐS:** $6x + 3y - 13z + 39 = 0$

**Bài 2:** Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn PQ với $P(2, 3, -4)$, $Q(4, -1, 0)$

**ĐS:** $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

**Bài 3:** Lập phương trình mặt phẳng qua 3 hình chiếu của $I(3, 6, 9)$ lên Ox, Oy, Oz.

**ĐS:** $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

**Bài 4:** Lập phương trình mặt phẳng qua $M(1, 0, 5)$ và song song $\alpha$:
$2x - y + z - 27 = 0$

**ĐS:** $2x - y + z - 7 = 0$.

**Bài 5:** Lập phương trình mặt phẳng qua $E(4, -1, 2)$ và chứa Ox.

**HD:** dùng vectơ đơn vị trên Ox

**Bài 6:** Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng qua $K(3, -1, -5)$ và vuông góc với 2 mặt phẳng: (P): $3x - 2y + 2z + 7 = 0$, Q): $5x - 4y + 3z + 1 = 0$

**ĐS:** $2x + y - 2z - 15 = 0$.

**Bài 7:** Lập phương trình mặt phẳng qua $G(2; -8; 5)$ và cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C mà G là trọng tâm $\Delta ABC$.

**HD:** dùng công thức trọng tâm

**Bài 8:** Lập phương trình mặt phẳng qua $I(2, -1, 4)$ và cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C mà $OA = 2OB = 3OC$.

**HD:** dùng phương trình đoạn chắn

**Bài 9:** Cho 4 điểm $A(7, 9, 1)$, $B(-2, -3, 2)$, $C(1, 5, 5)$ $D(-6, 2, 5)$
Lập phương trình mặt phẳng qua AB và song song CD.

**ĐS:** $3x - 7y - 57z + 99 = 0$.

**Bài 10:** Lập phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng
$19x - 6y - 4z + 2 = 0$, $42x - 8y + 3z + 11 = 0$ và qua $H(3, 4, 1)$

**ĐS:** $30x - 16y - 21z - 5 = 0$.

**Bài 11:** Lập phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng (P) : $7x - y + 4z - 1 = 0$

**ĐS:** $3x + 5y - 4z + 25 = 0$

**Bài 12:** Lập phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng
$x + y - z - 3 = 0$, $y + 2z - 4 = 0$ và song song mặt phẳng
(Q): $x + y + z - 22 = 0$

**ĐS:** không tồn tại.

**Bài 13:** Tứ diện $A(-2, 0, 1)$, $B(2, 3, -2)$, $C(1, 0, 4)$ $D(3, 5, -1)$
Lập phương trình mặt phẳng đi qua trọng tâm tứ diện và song song với (BCD)

**HD:** cùng VTPT.

**Bài 14:** Tứ diện $A(7, 9, 1)$, $B(-2, -3, 2)$, $C(1, 5, 5)$ $D(-6, 2, 5)$

Gọi trọng tâm I và tâm mặt cầu ngoại tiếp E của tứ diện. Lập phương trình mặt phẳng (BIE).

**ĐS:** $25x - 6y - 10z + 52 = 0$.

**Bài 15:** Lập phương trình mặt phẳng qua A(3; 1; 2), B(1; 0; 5) và hợp với Ox một góc $60^0$

**HD:** xác định VTPT.

**Bài 16:** Lập phương trình mặt phẳng qua A(2; 0; 0), B(0; 3; 0) và hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc $45^0$

**HD:** dùng phương trình đoạn chắn.

**Bài 17:** Lập phương trình mặt phẳng song song và cách đều 2 mặt phẳng song song: $5x + 3y - 2z + 1 = 0$, $5x + 3y - 2z + 13 = 0$

**ĐS:** $5x + 3y - 2z + 7 = 0$.

**Bài 18:** Tìm tập hợp các điểm M cách mặt phẳng (P): $4x + y - 3z - 2 = 0$ một đoạn bằng 5.

**HD:** Gọi M(x; y; z) và dùng công thức khoảng cách

**Bài 19:** Cho A(2; 1; −2), B(3; 0; 4), C(−3; 1; 5).Tìm tập hợp các điểm M mà $\left|\overline{MA} + 2\overline{MB}\right| = \left|\overline{MA} + 2\overline{MC}\right|$

**HD:** Gọi M(x; y; z) và dùng công thức toạ độ vectơ

**Bài 20:** Tứ diện ABCD có A (1, 2, −1), B(0, 1, 3), C(2, 0, 4), D(−1, 2, 0). Tìm $M \in (ABC)$ để $|MO - MD|$ lớn nhất

**ĐS:** $(\frac{-6}{5}; \frac{12}{5}; 0)$.

**Bài 21:** Lập phương trình mặt phẳng qua M (2, 5, 4) và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C mà thể tích hình chóp O.ABC bé nhất.

**HD:** dùng phương trình đoạn chắn và bất đẳng thức Côsi

**Bài 22:** Cho 3 điểm A (2, 0, 1), B (−2, 7, 2), C (1, 5, −3). Lập phương trình mặt phẳng chứa AB sao cho khoảng cách đến C lớn nhất.

**HD:** tìm hình chiếu C lên đường thẳng AB.

**Bài 23**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(0; 1; 2), B(2; −2; 1), C(−2; 0; 1).

1) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.
2) Tìm toạ độ của điểm M thuộc mặt phẳng $2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho MA = MB = MC

**ĐS:** 1) $x + 2y - 4z + 6 = 0$ 2) M(2; 3; −7)

**Bài 24**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm G(1; 1; 1)

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua G và vuông góc với đường thẳng OG.
2) Mặt phẳng (α) tìm được ở trên cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.

**ĐS:** 1) $x + y + z - 3 = 0$.

ABC

**Bài 25:** Lập phương trình mặt phẳng (P) qua M(3; 8; 9) và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích bé nhất.

**Bài 26:** Tìm trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC với A(3; 4; 0),B(1; 0; 2) và C(–1; 3; 2).

**HD:** trực tâm H thuộc mp(ABC).

**Bài 27**: Trong không gian Oxyz, cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D'. Biết A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 2; 0) và A'(0; 0; 2). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình mặt phẳng qua MN và song song với BA'. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BA'.

**ĐS:** (P): $x - y + z - 1 = 0$, góc $60^0$

**Bài 28**: Cho ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a, b, c là ba số dương thay đổi và luôn thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Xác định a, b, c sao cho khoảng cách từ điểm O(0; 0; 0) đến mặt phẳng (ABC) là lớn nhất.

**ĐS:** $a = b = c = 1$.

**Bài 29**: Cho hai điểm A(4; 2; 3), B(0; –2; 1)

1) Tìm trên trục Ox điểm M cách đều điểm A và mặt phẳng (P) có phương trình: $x - y - 3z - 17 = 0$.

2) Viết phương trình (Q) // (P) và cách đều hai điểm A và B.

**ĐS:** 1) M(–1; 0; 0), M'(7; 0; 0) 2) (Q): $x - y - 3z + 4 = 0$.

**Bài 30**: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $x + 3ky - z + 2 = 0$ và (Q): $kx - y + z + 1 = 0$. Tìm k để d vuông góc với mặt phẳng (P): $x - y - 2z + 5 = 0$

**ĐS**: $k = 1$.

**Bài 31**: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến 2 mặt phẳng (α): $(2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0$ và (β): $mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0$. Xác định m để d song song mặt phẳng (P).

**ĐS:** $m = -\dfrac{1}{2}$

**Bài 32:** Lập phương trình mặt cầu qua A(0, 0, 3) và qua đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $\alpha : 2x - 2y - z + 4 = 0$ với mặt cầu

(S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 = 0$

**ĐS:** $x^2 + y^2 + z^2 + 88x - 90y - 47z + 138 = 0$.

**Bài 33:** Xét vị trí tương đối của mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z + 5 = 0$ với (P): $x + 2y + z + 9 = 0$

**ĐS:** không có điểm chung

**Bài 34:** Tìm quỹ tích các điểm M mà có tổng bình phương khoảng cách đến 3 mặt phẳng: $x - y + 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $z + 1 = 0$ bằng 20.

**ĐS:** mặt cầu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 20$

ABC

**Bài 35:** Tìm điểm M thuộc mặt cầu $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 16$ có khoảng cách đến mặt phẳng (P): $2x - 2y + z + 12 = 0$ lớn nhất.

**HD:** lập phương trình đường thẳng qua tâm I và vuông góc (P).

**Bài 36:** Cho A(1; 2; 0), B(5; –2; 1), C(5; 1; 6). Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P): $3x - y + 4z + 1 = 0$ mà $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ bé nhất.

**HD:** tìm điểm I(x; y; z) thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

**Bài 37:** Cho A (1, 3, –2), B (13, 7, –4) và $\alpha$: $x - 2y + 2z - 9 = 0$. Chứng minh đường thẳng AB song song $\alpha$. Tìm M thuộc $\alpha$ để MA + MB bé nhất.

**ĐS:** M(9; 1; 1).

**Bài 38:** Tứ diện OABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc nhau, gọi I là trung điểm của OA. Tính đường cao OH của tứ diện và góc giữa IB với AC

**HD:** chọn hệ toạ độ Oxyz và lập phương trình đoạn chắn.

**Bài 39:** Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình chữ nhật có AB = a, AD = 2a, SA = 2a vuông góc đáy. Gọi M, N là trung điểm của SA, BC. Tính diện tích tam giác DMN.

**HD:** chọn hệ toạ độ Axyz .

**Bài 40:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật AB = a, AD = $a\sqrt{3}$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = a. Tính góc giữa SB với CD và tính khoảng cách từ A đến (SBD).

**HD:** chọn hệ toạ độ Axyz.

**Bài 41:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có các kích thước AB = 3, AD = 4, AA' = 3. Trên các cạnh BB', CD, A'D' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B'M = CN = 1, D'P = 2. Tính khoảng cách từ A đến các mặt phẳng (B'D'C) và (MNP).

**ĐS:** $d(A; (MNP)) = \dfrac{44}{\sqrt{213}}$.

**Bài 42:** Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC vuông tại A, AB = 2a, khoảng cách từ AA' tới mặt bên BCC'B' là a, mặt phẳng (ABC') hợp với đáy góc $45^0$. Tính thể tích lăng trụ và khoảng cách từ A đến mp(A'BC).

**HD:** mặt bên là hình vuông, chọn hệ toạ độ Axyz

**Bài 43:** Lập phương trình mặt cầu có R = 3 và tiếp xúc (P): $x + 2y + 2z + 3 = 0$ tại T (1, 1, –3)

**HD:** có 2 tâm I(2; 3; –1), (0; –1; –5).

**Bài 44:** Cho A(2; 1; 1), B(–4; 5; 5). Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng AB và tiếp xúc 2 mặt phẳng:

$x + 2y - 2z - 2 = 0$ ; $x + 2y - 2z + 4 = 0$

**ĐS:** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

ABC

# §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

## A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

**Vectơ chỉ phương** của đường thẳng là vectơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng.

Một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương cùng phương với nhau nên ta có thể chọn tọa độ tỉ lệ.

**Phương trình của đường thẳng:** đi qua $M_0(x_0, y_0: z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Phương trình tham số: $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Phương trình chính tắc khi a, b, c $\neq$ 0: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

**Vị trí tương đối của 2 đường thẳng:**

d qua $A(x_A, y_A, z_A)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ (a, b, c)

d' qua $B(x_B, y_B, z_B)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}$ (a', b', c')

Có 4 vị trí tương đối:

– Chéo nhau: $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$

– Cắt nhau: $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} = 0$ và $a : b : c \neq a' : b' : c'$

– Trùng nhau: $a : b : c = a' : b' : c' = (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

– Song song: $a : b : c = a' : b' : c' \neq (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

**Vị trí tương đối của 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng:**

Đường thẳng d qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) qua $M_0$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$

Có 3 vị trí tương đối:

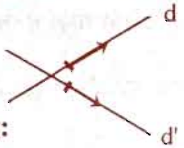
– Cắt nhau: $\vec{u} . \vec{n} \neq 0$

– Song song: $\vec{u} \quad \vec{n} = 0$ và $A \notin (P)$

– Đường thẳng thuộc mặt phẳng: $\vec{u} \quad \vec{n} = 0$ và $A \in (P)$

**Góc giữa 2 đường thẳng:** d có VTCP $\vec{u}$ và d' có VTCP $\vec{v}$

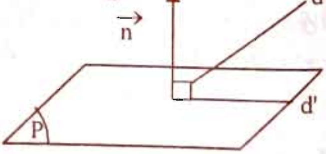
$\cos(d, d') = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$



**Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

d có VTCP $\vec{u}$ và (P) có VTPT $\vec{n}$

$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})|$



- **Chú ý:**

– Góc giữa 2 vectơ từ $0^\circ$ đến $180^\circ$ và các góc còn lại giữa đường thẳng, mặt phẳng đều từ $0^\circ$ đến $90^\circ$

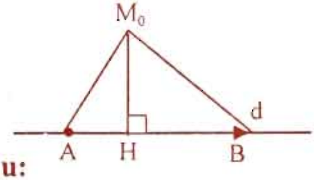
– Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó lên mặt phẳng.

**Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng:**

Cho $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và đường thẳng d qua A và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$S(M_0AB) = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AM_0}, \overrightarrow{AB}]\right| = \frac{1}{2}AB.M_0H$$

nên: $d(M_0, d) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$



**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:**

Đường thẳng $d_1$ qua $M_1$ và có VTCP $\vec{u}_1$

Đường thẳng $d_2$ qua $M_2$ và có VTCP $\vec{u}_2$

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\right|}$$

## DẠNG 1: LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

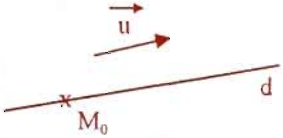
- **Phương pháp chung**

Để lập phương trình đường thẳng là tìm đủ các yếu tố xác định: điểm, VTCP, VTPT và các quan hệ cho từ giả thiết để chọn dạng phương trình thích hợp.

Việc khử tham số, đặt tham số,... cho phép ta chuyển dạng các phương trình.

– Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Phương trình tham số: d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

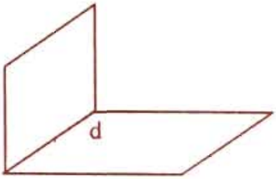


Nếu a, b, c $\neq$ 0 thì có phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

– Đường thẳng giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt nhau:

Nếu $d = \alpha \cap \beta$ thì chọn VTCP $\vec{n} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$



Hoặc từ hệ $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ ta chọn ra 2 bộ nghiệm (x; y; z) tương ứng toạ độ của 2 điểm thuộc giao tuyến.

– Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B: chọn VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ từ đó ta có

$$AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

– Đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau:

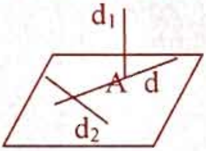
Đường thẳng $d_1$ qua $M_1$ và có VTCP $\vec{u}_1$

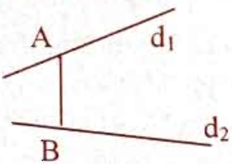
Đường thẳng $d_2$ qua $M_2$ và có VTCP $\vec{u}_2$

Cách 1: Đường vuông góc chung d có VTCP $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}\right]$

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và $d_2$.

Tìm giao điểm A của $d_1$ và (P) thì d đi qua A và có VTCP $\vec{u}$





Cách 2: Gọi đoạn vuông góc chung là AB, $A \in d_1$ và $B \in d_2$ dạng tham số theo t và t' Tìm t và t' bằng hệ điều kiện: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$ Đường vuông góc chung d là đường thẳng AB.

– Hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P):

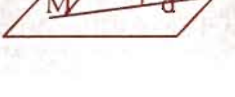
Cách 1: Lấy 2 điểm A, B thuộc d rồi tìm hình chiếu A',B' của chúng lên (P). Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng A'B'

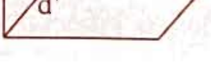
Cách 2: Tìm giao điểm M của d và (P) nếu có. Lấy điểm A thuộc d rồi tìm hình chiếu A' của A lên (P). Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng MA'.

Cách 3: Lấy điểm A thuộc d rồi tìm hình chiếu A' của A và hình chiếu $\vec{u}'$ của VTCP $\vec{u}$ lên (P). Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng qua A' và có VTCP $\vec{u}'$

Cách 4: Tìm giao điểm M của d và (P) nếu có. Tìm hình chiếu $\vec{u}$ của VTCP $\vec{u}$ lên (P). Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng qua M và có VTCP $\vec{u}$

Cách 5: Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P). Đường thẳng d' cần tìm là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q).





**Ví dụ 1**: Lập phương trình chính tắc của các đường thẳng:

a) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 5 \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

**Giải**

a) Đường thẳng đã cho đi qua M(2; –1; –4) và có VTCP $\vec{u} = (2; 3; 3)$ nên có phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c} \Leftrightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z + 4}{3}$$

b) Đường thẳng đã cho có VTCP $\vec{u} = (-1; 0; 3)$

Vì b = 0 nên không có dạng chính tắc.

c) Phương trình chính tắc của đường thẳng đã cho là:

$$\frac{x + 1}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 3}{2}$$

**Ví dụ 2**: Lập phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d:

a) Qua hai điểm A(1; 3; 5), B(4; –2; 1)

b) Là giao tuyến của hai mặt phẳng:

(P) : $2x - y + z + 5 = 0$ ; (P'): $2x - z + 3 = 0$

**Giải**

a) d có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3; -5; -4)$ và qua A(1; 3; 5) nên có phương trình

tham số: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - 5t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$; chính tắc: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z-5}{-4}$

b) (P), (P') có VTPT $\vec{n} = (2; -1; 1)$, $\vec{n}' = (2; 0; -1)$.

Gọi VTCP của giao tuyến d là $\vec{u}$ thì $\vec{u} \perp \vec{n}, \vec{n}'$

Chọn $\vec{u} = \left[\vec{n} \quad \vec{n}'\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (1; 4; 2).$

Các điểm thuộc giao tuyến d có toạ độ thoả mãn hệ:

$\begin{cases} 2x - y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ Cho x = 0 thì y = 8, z = 3.

Do đó d qua M(0; 8; 3), có VTCP $\vec{u} = (1; 4; 2)$ nên có phương trình tham số và chính tắc là:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} ; \quad \frac{x}{1} = \frac{y - 8}{4} = \frac{z - 3}{2}$$

Cách khác:

Ta có: $\begin{cases} 2x - y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 2x + 5 \\ z = 2x + 3 \end{cases}$

ABC

Đặt x = t thì y = 8 + 4t, z = 3 + 2t nên phương trình tham số là: $\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Ngoài cách tìm một điểm và VTCP, cách tạo tham số, ta có thể tìm 2 điểm trên giao tuyến.

**Ví dụ 3**: Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng:

a) Đi qua điểm A(4; 3; 1) và song song với đường thẳng d': $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

b) Đi qua điểm B(–2; 3; 1) và song song với đường thẳng d': $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{3}$

c) Đi qua điểm C(1; 2; –1) và song song với đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng $x + y - z + 3 = 0$; $2x - y + 5z - 4 = 0$.

**Giải**

a) d' có VTCP $\vec{u}' = (2; -3; 2)$ nên đường thẳng d qua A, VTCP $u = u'$ có phương trình: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$

b) d' có VTCP $\vec{u}' = (2; 1; 3)$ nên đường thẳng d qua B, VTCP $\vec{u} = \vec{u}'$ có phương trình: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{3}$ ; $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

c) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $x + y - z + 3 = 0$ là $\overrightarrow{n_1} = (1; 1; -1)$, của mặt phẳng $2x - y + 5z - 4 = 0$ là $\overrightarrow{n_2} = (2; -1; 5)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{n_1} \quad \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (4; -7; -3)$$

Do đó đường thẳng cần tìm có phương trình:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+1}{-3} \quad ; \quad \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

**Ví dụ 4**: Lập phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC):

a) A(0; 0; 1), B(–1; –2; 0), C(2; 1; –1) tại trọng tâm G của tam giác ABC.

b) A(1; 0; –1), B(2; 3; –1), C(1; 3; 1) tại trực tâm H của tam giác ABC.

**Giải**

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 1; -2)$ nên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) có VTCP $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; -4; 3)$.

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0)$

Vậy phương trình tham số d: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = -\frac{1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases}$

b) Phương trình mặt phẳng (α) qua C vuông góc với AB là:

$1(x - 1) + 3(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0.$

Phương trình mặt phẳng (β) qua B vuông góc với AC là:

$3(y - 3) + 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 3y + 2z - 7 = 0.$

Đường thẳng d qua trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là giao tuyến của (α) và (β).

Đường thẳng d qua N(1; 3; –1) và có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = [\overrightarrow{n_\alpha} \;\; \overrightarrow{n_\beta}] = (6; -2; 3)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

**Ví dụ 5**: Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M(0; 1; –1) vuông góc và cắt đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

**Giải**

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (-4; 1; 4)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên Δ thì $H(1 - 4t; t; -1 + 4t)$.

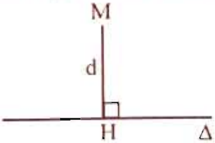
Ta có $\overline{MH} = (1 - 4t; t - 1; 4t)$ nên MH ⊥ Δ

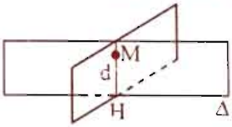
$\Leftrightarrow \vec{u}.\overline{MH} = 0 \Leftrightarrow -4(1 - 4t) + 1(t - 1) + 4(4t) = 0.$

$\Leftrightarrow 33t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{5}{33}$. Do đó $H\left(\frac{13}{33}; \frac{5}{33}; \frac{-13}{33}\right)$

Đường thẳng d có VTCP $\overline{MH} = \left(\frac{13}{33}; \frac{-28}{33}; \frac{20}{33}\right)$ hay (13; –28; 20)

Vậy phương trình chính tắc của d là $\frac{x}{13} = \frac{y - 1}{-28} = \frac{z + 1}{20}$





Cách khác: Đường thẳng d cần tìm là giao tuyến của mặt phẳng (M, Δ): $4x + 4y + 3z - 1 = 0$ và mặt phẳng qua M, vuông góc với Δ: $4x - y - 4z - 3 = 0$.

ABC

**Ví dụ 6**: Lập phương trình đường thẳng đi qua A(−1; 8; 5) và vuông góc với 2 đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ ; d': $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

**Giải**

Hai đường thẳng đã cho có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và $\vec{v} = (-1; 1; -3)$ vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là

$\vec{u}' = [\vec{u}, \vec{v}] = (5; 5; 0)$ hay (1; 1; 0).

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 8 + t \\ z = 5 \end{cases}$

**Ví dụ 7**: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng sau trên mỗi mặt phẳng toạ độ.

a) d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$

**Giải**

a) Điểm M(x; y; z) thuộc d có hình chiếu lên mp(Oyz) là M'(0; y; z) thuộc d', d' là hình chiếu lên mp(Oyz).

Vậy phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$.

Tương tự thì hình chiếu lên mp(Oxy), mp(Oxz) có phương trình tham số:

$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 \\ z = 4 + t \end{cases}$

b) Đường thẳng d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Mỗi điểm M(x; y; z) ∈ d có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm M'(x; y; 0) ∈ d', d' là hình chiếu của d trên mp(Oxy).

Vậy d' có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t + 3t \\ z = 0 \end{cases}$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

ABC

**Ví dụ 8**: Lập phương trình hình chiếu của đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ lên mặt phẳng (P): $x + y + z - 7 = 0$.

**Giải**

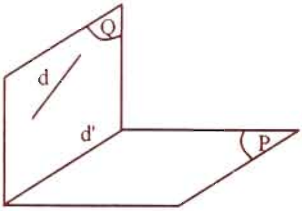
Ta viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P).

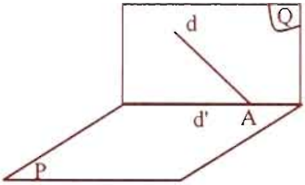
Vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overline{n_P} = (1; 1; 1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (P) thì vectơ pháp tuyến $\bar{n}$ của (Q) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\overline{n_P}$ nên ta có thể lấy $\bar{n} = [\vec{u}, \overline{n_P}] = (2; 1; -3)$. Và (Q) đi qua d nên đi qua M(0; 8; 3). Vậy (Q) có phương trình:

$$2(x - 0) + (y - 8) - 3(z - 3) = 0 \text{ hay } 2x + y - 3z + 1 = 0.$$

Vì d không vuông góc với (P) nên hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d'. Đường thẳng d' là giao tuyến của (Q) và (P) nên d' chứa các điểm có toạ độ (x, y, z) thoả mãn: $\begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Đặt z = t thì $x = -8 + 4t$, $y = 15 - 5t$. Vậy d': $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t \end{cases}$





Cách khác: Tìm giao điểm A của d và (P). Thế toạ độ x, y, z vào (P):

$$t + 8 + 4t) + (3 + 2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{7} \Rightarrow A\left(\frac{-4}{7}; \frac{40}{7}; \frac{13}{7}\right)$$

Mặt phẳng (Q) qua d, vuông góc với (P) có VTPT

$$\bar{n} = [\vec{u}, \overline{n_P}] = (2; 1; -3)$$

Đường thẳng d' của VTCP $\vec{u}' = [\bar{n}, \overline{n_P}] = (4; -5; 1)$

Từ đó suy ra phương trình của hình chiếu d'.

**Ví dụ 9**: Cho đường thẳng d và mp(P) có phương trình:

d: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases}$ (P): $x - 3y + z - 1 = 0$.

ABC

a) Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

b) Viết phương trình đường thẳng $d_1$ là hình chiếu song song của d trên mp(P) theo phương Oz.

**Giải**

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A\left(\frac{2}{3};-\frac{11}{3};0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P) thì giao tuyến d = (P) ∩ (Q) là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1; -3; 1)$. Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = [\vec{u}, \overrightarrow{n_P}] = (4; 0; -4)$ hay $(1; 0; -1)$. Vì (Q) chứa đường thẳng d nên cũng đi qua điểm A, do đó (Q) có phương trình

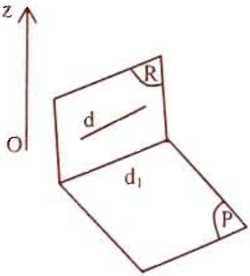
$x - \frac{2}{3} - z = 0$ hay $3x - 3z - 2 = 0$.

Ta có (P): $x - 3y + z - 1 = 0$.

Đặt $z = t$ thì $x = \frac{2}{3} + t$, $y = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3}t$.

Vậy phương trình của đường thẳng d' là: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3}t. \\ z = t \end{cases}$

b) Gọi (R) là mặt phẳng chứa d và song song hoặc chứa Oz thì $d_1$ là giao tuyến của mp(R) và mp(P).



Mặt phẳng (R) đi qua $A\left(\frac{2}{3};-\frac{11}{3};0\right)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_R} = \left[\vec{u}, \vec{k}\right] = (1; -1; 0)$.

Mặt phẳng (R) có phương trình là $3x - 3y - 13 = 0$.

Ta có (P): $x - 3y + z - 1 = 0$.

Đặt $y = t$ thì $x = \frac{13}{3} + t$, $z = -\frac{10}{3} + 2t$.

Vậy $d_1$ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = \frac{13}{3} + t \\ y = t \\ z = -\frac{10}{3} + 2t \end{cases}$

**Ví dụ 10**: Viết phương trình hình chiếu của $(\Delta_2)$: $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ theo phương $(\Delta_1)$: $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ lên mặt phẳng $(\alpha)$: $x+y+z+3=0$.

**Giải**

Hình chiếu $\Delta$ là giao tuyến của $(\alpha)$ với $(\beta)$, trong đó $(\beta)$ là mặt phẳng chứa $(\Delta_2)$, song song với $(\Delta_1)$.

Vì $(\beta)$ chứa $(\Delta_2)$ nên đi qua $A(7; 3; 9)$ và có VTPT $\vec{n}=[\vec{u_1},\vec{u_2}]=(8; 4; 16)$ hay $(2; 1; 4)$.

Do đó $(\beta)$: $2(x-7)+1(y-3)+4(z-9)=0$ hay $2x+y+4z-53=0$.

Các điểm thuộc giao tuyến $(\Delta_2)$ có toạ độ thoả mãn: $\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x+y+4z-53=0 \end{cases}$

Đặt $z=t$ thì $x=56-3t$, $y=-59+2t$

Vậy phương trình tham số của hình chiếu: $\begin{cases} x=56-3t \\ y=-59+2t \\ z=t \end{cases}$.

**Ví dụ 11**: Cho đường thẳng $\Delta$ và mp(P) có phương trình:

$(\Delta)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$ (P): $2x+z-5=0$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm A của $\Delta$ và (P), nằm trong (P) và vuông góc với $\Delta$.

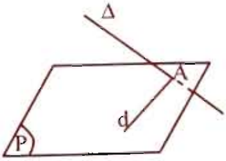
**Giải**

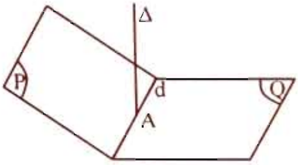
$\Delta$ dạng tham số: $x=1+t$, $y=2+2t$, $z=3+2t$.

Thế x, y, z vào (P) thì được $t=0$ nên $A(1; 2; 3)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với $\Delta$. Khi đó, vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ của d phải vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1; 2; 2)$ của $\Delta$, đồng thời vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2; 0; 1)$ của (P), nên ta chọn: $u'=[\vec{u},\vec{n}]=(2; 3; -4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-4}$





Cách khác: Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $\Delta$ thì (Q) có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của $\Delta$ nên có phương trình:

$x-1+2(y-2)+2(z-3)=0$ hay $x+2y+2z-11=0$.

ABC

Giao tuyến d của (P) và (Q) là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và $d \perp \Delta$ (vì d nằm trong (Q) mà $\Delta \perp (Q)$). Suy ra phương trình tham số của

d là: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}t \\ y = t \\ z = \dfrac{17}{3} - \dfrac{4}{3}t \end{cases}$

**Ví dụ 12**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta$: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng $\Delta$:

**Giải**

Theo giả thiết đường thẳng d đi qua giao điểm của $\Delta$ với (P):

Toạ độ giao điểm I của $\Delta$ với (P) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1} \\ x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-3; 1; 1)$$

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (1; 2; -3)$,

vectơ chỉ phương của $\Delta$: $\vec{u} = (1; 1; -1)$

Đường thẳng d cần tìm qua I và có vectơ chỉ phương

$\vec{v} = [\vec{n}, \vec{u}] = (1; -2; -1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

**Ví dụ 13**: Lập phương trình của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxz) và cắt hai đường thẳng: d: $\begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ d': $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$

**Giải**

Đường thẳng d qua A(0; –4; 3) có VTCP $u = (1; 1; -1)$

Đường thẳng d' qua B(1; –3; 4) có VTCP $u = (-2; 1; -5)$

Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của mặt phẳng ($\alpha$) qua d, vuông góc với (Oxz) và ($\beta$) qua d', vuông góc (Oxz)

Ta có ($\alpha$): $x + z - 3 = 0$, ($\beta$): $5x - 2z + 3 = 0$

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng: $\begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = t \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases}$

ABC

**Ví dụ 14**: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1; –1; 1) và cắt cả hai đường thẳng sau đây: d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ d': $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

### Giải

Ta có A không thuộc d và d'.

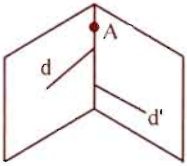
Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 0; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -1)$. Đường thẳng d' đi qua điểm M'(0; –1; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (1; -2; 1)$.

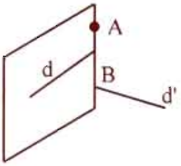
Đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng: mp(A; d) và mp(A; d'). Mp(A; d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (-3; 4; -2)$, mp(A; d') có vectơ pháp tuyến $\vec{n}\,' = [\overrightarrow{AM}\,', \vec{u}\,'] = (2; 2; 2)$ hay (1; 1; 1).

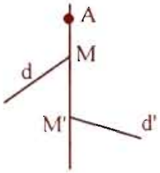
Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $[\vec{n}, \vec{n}\,'] = (6; 1; -7)$ đi qua A nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$.

Ta có $\vec{u}.\vec{n}\,' = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$ nên d cắt mp(A; d'), do đó d cắt Δ.

Tương tự, vì $\vec{u}\,'.\vec{n} = -3 - 8 - 2 = -13 \neq 0$ nên d' cắt mp(A; d), do đó d' cắt Δ. Vậy Δ là đường thẳng đi qua A, cắt cả d và d'.







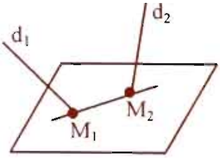
Cách khác:

– Ta có thể tìm giao điểm B của d' và (A; d), đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và B.

– Lấy điểm M(1 + 2t; t; 3 – t) nằm trên d và điểm M'(t'; –1 – 2t'; 2 + t') nằm trên d'. Ta tìm giá trị của t và t' sao cho điểm A, M, M' thẳng hàng, tức là $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM}\,'$ cùng phương: $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}\,'] = \vec{0}$.

**Ví dụ 15:** Viết phương trình của đường thẳng nằm trong mặt phẳng y + 2z = 0 và cắt hai đường thẳng:

d₁: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$, d₂: $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 1 \end{cases}$



ABC

### Giải

Ta tìm các giao điểm của hai đường thẳng đã cho với mặt phẳng $y + 2z = 0$

Tham số t ứng với giao điểm $M_1$ của đường thẳng $d_1$ với mặt phẳng trên là nghiệm của phương trình: $t + 2 \quad 4t = 0 \Rightarrow 9t = 0 \Rightarrow t = 0$.

Vậy $M_1(1; 0; 0)$.

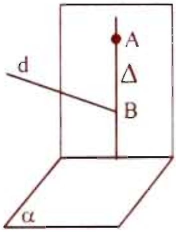
Tương tự, giao điểm của đường thẳng $d_2$ với mặt phẳng trên là $M_2(5; -2; 1)$ ứng với $t' = -3$.

Đường thẳng phải tìm qua $M_1$ và $M_2$ có VTCP

$\vec{u} = \overline{M_1M_2} = (4; -2; 1)$ nên có PT tham số: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

**Ví dụ 16**: Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $A(-1; 2; -3)$, vuông góc với (α): $6x - 2y - 3z + 8 = 0$ và cắt đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$

### Giải



(Δ) nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (6; -2; -3)$,

$$(P): 6(x + 1) - 2(y - 2) - 3(z + 3) = 0$$

$\Leftrightarrow 6x - 2y - 3z + 1 = 0$.

Giao điểm của (d) với (P) là $B(1; -1; 3)$.

Do đó đường thẳng (Δ) là đường thẳng qua A và B có phương trình chính tắc: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$

**Ví dụ 17**: Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases}$ và (P): $x - 3y + z - 11 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O, cắt d và song song với mp(P).

### Giải

Gọi (P') là mặt phẳng đi qua gốc toạ độ O và song song với mp(P) thì (P') có phương trình: $x - 3y + z = 0$. Giao điểm I của đường thẳng d và mp(P') có toạ độ $I\left(\dfrac{37}{3}; 8; \dfrac{35}{3}\right)$, với $t = \dfrac{35}{3}$

Đường thẳng đi qua O và I là đường thẳng cần tìm qua O và có VTCP:

ABC

$3\overline{OI} = (37; 24; 35)$ là $\dfrac{x}{37} = \dfrac{y}{24} = \dfrac{z}{35}$

**Ví dụ 18:** Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d_1$ và cắt cả hai đường thẳng $d_2$ và $d_3$, biết phương trình của $d_1$, $d_2$ và $d_3$ là:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases};\ d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3};\ d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$$

### Giải

Đường thẳng $d_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (0; 4; -1)$, các phương trình của $d_2$ và $d_3$ dưới dạng tham số:

$$d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \qquad d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$$

Trên đường thẳng $d_2$ lấy điểm $M_2(1 + t; -2 + 4t; 2 + 3t)$ và trên đường thẳng $d_3$ lấy điểm $M_3(-4 + 5t'; -7 + 9t'; t')$.

Ta có $\overline{M_2M_3} = (-5 + 5t' - t; -5 + 9t' - 4t; -2 + t' - 3t)$

Hai vectơ $\overline{M_2M_3}$ và $\vec{u}_1$ cùng phương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -5 + 5t' - t = 0 \\ \dfrac{-5 + 9t' - 4t}{4} = \dfrac{-2 + t' - 3t}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Do đó $M_2(1; -2; 2)$ và $\overline{M_2M_3} = (0; 4; -1)$

Vậy đường thẳng $\Delta$ đi qua $M_2$ và $M_3$ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Vì $M_2 \notin d_1$ nên $\Delta$ đúng là đường thẳng cần tìm.

Cách khác: Viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $d_2$ và song song với $d_1$, phương trình mặt phẳng $(\beta)$ đi qua $d_3$ và song song với $d_1$. Hai mặt phẳng đó cắt nhau theo giao tuyến $\Delta$ là đường thẳng cần tìm, nếu $\Delta$ không trùng với $d_1$.

**Ví dụ 19**: Lập phương trình của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(3; -1; -4)$ cắt trục Oy và song song với mặt phẳng $y + 2x = 0$.

### Giải

Ta có điểm A ở ngoài mặt phẳng $y + 2x = 0$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua điểm $A(3; -1; -4)$ và song song với mặt phẳng $y + 2x = 0$ có dạng $y + 2x + D = 0$, $D \neq 0$. Vì điểm $A(3; -1; -4)$ thuộc mặt phẳng đó nên ta tính được $D = -5$.

Vậy mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình là: $y + 2x - 5 = 0$.

Trục Oy cắt mặt phẳng $(\alpha)$ tại điểm $M(0; 5; 0)$.

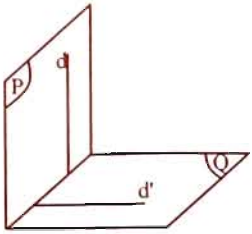
ABC

Vậy phương trình đường thẳng AM là đường thẳng cần tìm:

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+4}{4}$$

**Ví dụ 20**: Viết phương trình chính tắc của đường vuông góc chung của 2 đường thẳng:

$$d:\begin{cases}x=t\\y=3\\z=6+t\end{cases}\quad \text{và } d':\begin{cases}x=2+t'\\y=1-t'\\z=2-t'\end{cases}$$



**Giải**

d qua A(0; 3; 6) ta có VTCP $\vec{u}=(1;0;1)$

d' qua B(2; 1; 2) có VTCP $\vec{u}'=(1;-1;-1)$

Ta có $\vec{u}.\vec{u}'=0$, $[\vec{u},\vec{u}'].\overrightarrow{AB}=2\neq 0$

nên 2 đường thẳng d, d' chéo nhau và vuông góc nhau.

Hai đường thẳng vuông góc nhau nên đường vuông góc chung là giao tuyến của mặt phẳng (P) qua d, vuông góc d' và (Q) qua d' vuông góc d.

(P) đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến $\vec{u}'$ có phương trình:

$x-(y-3)-(z-6)=0$ hay $x-y-z+9=0$.

Tương tự, (Q) đi qua điểm B và có vectơ pháp tuyến $\vec{u}$ nên có phương trình:

$x-2+z-2=0$ hay $x+z-4=0$.

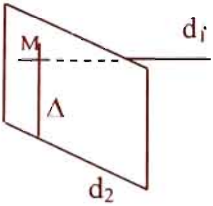
Suy ra phương trình của đường vuông góc chung của d và d' là:

$$\begin{cases}x=t\\y=5+2t\\z=4-t\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{-1}$$

**Ví dụ 21:** Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng:

$(d_1)$: $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ và $(d_2)$: $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

**Giải**



$(d_1)$, $(d_2)$ có vectơ chỉ phương lần lượt là:

$\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$, $\overrightarrow{u_2}=(-7;2;3)$

$[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(8;4;16)$ nên vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;4)$

Mặt phẳng (P) chứa $(d_2)$ và song song với $\overrightarrow{u_\Delta}$ là:

$5x+34-11z-38=0$ ; $(P)\cap(d_1)=M(7;3;9)$

Đường thẳng (Δ) cần tìm đi qua M, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}$:

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-9}{4}$$

**Ví dụ 22:** Viết phương trình tham số của đường thẳng vuông góc chung của AC và BD biết A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1).

### Giải

PT đường AC là $(d_1)$: $x = 4 - 3t$, $y = 1 + 4t$, $z = 4 + t$ có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (-3; 4; 1)$.

PT đường BD là $(d_2)$: $x = 3 - 2k$, $y = 3 - 2k$, $z = 1$ có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-2; -2; 0)$

Gọi đường vuông góc chung là $(\Delta)$ qua E thuộc $d_1$, F thuộc $d_2$:

$E(4 - 3t; 1 + 4t; 4 + t)$; $F(3 - 2k; 3 - 2k; 1)$

$\overrightarrow{FE} = (1 - 3t + 2k; -2 + 4t + 2k; 3 + t)$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26t + 2k - 8 = 0 \\ t + 4k - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5}{17} \\ k = \dfrac{3}{17} \end{cases}$$

Suy ra $E\left(\dfrac{53}{17}; \dfrac{37}{17}; \dfrac{73}{17}\right)$, $F\left(\dfrac{45}{17}; \dfrac{45}{17}; \dfrac{17}{17}\right)$

Đường vuông góc chung $(\Delta)$ có vectơ phương

$\overrightarrow{FE} = \left(\dfrac{8}{17}; -\dfrac{8}{17}; \dfrac{56}{17}\right)$ hay $(1; -1; 7)$

nên có PT là: $x = \dfrac{45}{17} + t$, $y = \dfrac{45}{17} - t$ , $z = 1 + 7.t$

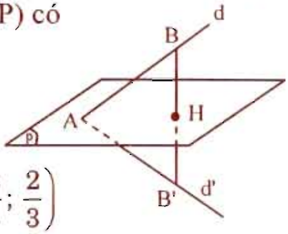
**Ví dụ 23**: Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-7}$ qua mặt phẳng (P): $x + 2y + z - 1 = 0$.

### Giải

Gọi A là giao điểm của d và (P) thì $A(2 - t; 3t; 1 - 7t)$.

Thế toạ độ vào (P) thì $t = 1$ nên $A(1; 3; -6)$.

Đường thẳng d đi qua $B(2; 0; 1)$. Ta tìm hình chiếu H của B lên (P). Phương trình đường thẳng qua B, vuông góc với (P) có



VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{n_P} = (1; 2; 1)$: $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$

Thế x, y, z vào (P) thì được $t' = -\dfrac{1}{3}$ nên $H\left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$

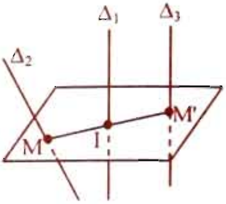
Do đó điểm đối xứng B qua (P) là $B'\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$

Đường thẳng d' có VTCP $\overrightarrow{AB'} = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{-13}{3}; \dfrac{19}{3}\right)$ hay $(1; -13; 19)$ nên có phương trình $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-13} = \dfrac{z+6}{19}$

ABC

**Ví dụ 24**: Cho 2 đường thẳng:

$(\Delta_1)$: $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ và $(\Delta_2)$: $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$. Lập phương trình đường thẳng $(\Delta_3)$ đối xứng với $(\Delta_2)$ qua $(\Delta_1)$.



**Giải**

Lấy điểm $M \in (\Delta_2)$

$\Rightarrow M(t+7;\ 2t+3;\ -t+9)$

Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với $(\Delta_1)$:

$$-7(x-t-7)+2(y-2t-3)+3(z+t-9)=0$$

Ta có $(\Delta_1)$: $x=-7k+3$, $y=2k+1$, $z=3k+1$ nên giao điểm của $(\Delta_1)$ và (P) là $I\left(\frac{21.t}{31}+3,-\frac{6t}{31}+1,-\frac{9t}{31}+1\right)$ ứng với $k=\frac{-3.t}{31}$

Gọi M' đối xứng với M qua $(\Delta_1)$ thì I là trung điểm đoạn MM' nên có $M'\left(\frac{11t}{31}-1,-\frac{74t}{31}-1,-\frac{13t}{31}-7\right)$.

Vậy đường thẳng $(\Delta_3)$ cần tìm chứa các điểm M' nên có phương trình là:

$$\begin{cases} x=-1+11t \\ y=-1-74t \\ z=-7+13t \end{cases}.$$

**Ví dụ 25**: Viết phương trình đường thẳng đi qua M(1; –5; 3) và tạo với hai đường thẳng Ox, Oy các góc bằng 60°

**Giải**

Gọi $\vec{u}=(a;\ b;\ c)$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm. Các đường thẳng Ox, Oy có các vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{j}=(0;\ 1;\ 0)$. Theo giả thiết của bài toán thì:

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow a^2=b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 4a^2=4b^2=a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow 2a^2=2b^2=c^2$ Chọn $c=\sqrt{2}$ thì $a=\pm 1$, $b=\pm 1$.

Vậy có 4 trường hợp xảy ra:

– Với $\vec{u}=(1;\ 1;\ \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$$

– Với $\vec{u}=(1;\ -1;\ \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$$

– Với $\vec{u}=(-1;\ 1;\ \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$$

– Với $\vec{u}=(-1;-1;\ \sqrt{2})$ thì đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$$

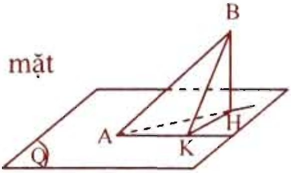
**Ví dụ 26**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ -1;\ 3)$

a) Viết phương trình tia AB, đoạn AB.

b) Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

**Giải**

a) Vectơ chỉ phương $\overline{AB}=(4;\ -1;\ 2)$. Phương trình tham số của tia AB: $\begin{cases}x=-3+4t\\y=-t\\z=1+2t\end{cases}$, $t\ \geq 0$, đoạn AB: $\begin{cases}x=-3+4t\\y=-t\\z=1+2t\end{cases}$ $0\leq t\leq 1$.



b) Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P).

Phương trình (Q): $x-2y+2z+1=0$.

K, H là hình chiếu của B trên Δ, (Q).

Ta có BK ≥ BH nên AH là đường thẳng cần tìm.

Toạ độ H(x; y; z) thoả mãn: $\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2}\\x-2y+2z+1=0\end{cases}\Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$

$\overline{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$. Vậy phương trình Δ: $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$

## DẠNG 2: LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, MẶT CẦU

**Phương trình tổng quát của mặt phẳng:**

Mặt phẳng qua $M_0(x_0,y_0,z_0)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A,B,C)$

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2\neq 0$$

hay $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

**Chú ý**: – Một mặt phẳng được xác định bởi một điểm và một đường thẳng không qua điểm đó, hoặc 2 đường thẳng song song hoặc 2 đường thẳng cắt nhau.

– Mặt phẳng chứa 2 đường thẳng cắt nhau:

Nếu (P) = mp(d,d′) thì chọn VTPT $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$

– Mặt phẳng chứa 2 đường thẳng song song:

Nếu (P) = mp(d, d′) và d qua A, d’ qua B thì chọn VTPT $\vec{n} = [\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}]$

**Phương trình mặt cầu:**

Mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \text{ hay:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$$

có tâm I(–A, –B, –C) và bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

**Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:**

Cho mặt cầu S(I; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của tâm I trên Δ và d = IH là khoảng cách từ I tới Δ.

a) Nếu d < R: đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B  Độ dài dây $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$

b) Nếu d = R, đường thẳng Δ và mặt cầu S(I; R) có điểm chung duy nhất là H. Khi đó, đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H hoặc Δ là tiếp tuyến của mặt cầu tại tiếp điểm H.

c) Nếu d > R: đường thẳng không có điểm chung với mặt cầu.

**Ví dụ 1**: Cho điểm A(2; 3; 1) và hai đường thẳng:

$$d_1 : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{và } d_2 : \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

a) Viết phương trình mp(P) đi qua A và $d_1$.

b) Viết phương trình mp(Q) đi qua A và $d_2$.

**Giải**

a) Đường thẳng $d_1$ đi qua điểm $M_1(-2; 2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-1; 1; 2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A và $d_1$ có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-1; 9; -5).$$

Vậy mp(P) có phương trình:

$$-(x + 2) + 9(y - 2) - 5z = 0 \text{ hay } x - 9y + 5z + 20 = 0.$$

b) Đường thẳng $d_2$ đi qua điểm $M_2(-5; 2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (3; -1; 1)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua A và $d_2$ có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}] = (-2; 4; 10) \text{ hay } (1; -2; -5).$$

Vậy mp(Q) có phương trình:

$$1(x + 5) - 2(y - 2) - 5z = 0 \text{ hay } x - 2y - 5z + 9 = 0.$$

ABC

**Ví dụ 2**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng có phương trình :

$d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ và $d_2 : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$

Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đã cho cùng nằm trong một mặt phẳng, viết phương trình mặt phẳng đó.

**Giải**

$d_1$ qua $M_1(1; -2; 5)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (2; -3; 4)$

$d_2$ qua $M_2(7; 2; 1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (3; 2; -2)$

Ta có $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-2; 16; 13)$ ; $\overrightarrow{M_1M_2} = (6; 4; -4)$

nên $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] . \overrightarrow{M_1M_2} = (-2)6 + 16.4 + 13(-4) = 0$

Vậy hai đường thẳng cùng nằm trong mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng nên có VTPT

$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2; 16; 13)$ đi qua $M_1$ nên có phương trình:

$-2(x-1) + 16(y+2) + 13(z-5) = 0$ hay $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

**Ví dụ 3**: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng:

$d_1 : \begin{cases} x = 4t \\ y = -\dfrac{3}{2} + 7t \\ z = 2t \end{cases}$ và song song với $d_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+5}{1}$

**Giải**

$d_1$ qua $A(0; -\dfrac{3}{2}; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (4; 7; 2)$

$d_2$ qua $B(1; 3; -5)$ và có VTCP $\vec{v} = (1; -2; 1)$

Do đó mp(P) có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (11; -2; -15)$ và qua A nên có phương trình:

$11(x-0) - 2(y + \dfrac{3}{2}) - 15(z-0) = 0$ hay $11x - 2y - 15z - 3 = 0$.

Vì B không thuộc (P) nên đó là mặt phẳng cần tìm.

**Ví dụ 4**: Viết phương trình mặt phẳng qua điểm A(3; –2; 1) và vuông góc với đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng.

(P): $3x + 2y - 2z + 8 = 0$, (Q): $2x - y + 3z + 7 = 0$.

**Giải**

Mặt phẳng (P), (Q) có VTPT $\vec{n} = (3; 2; -2)$, $\vec{n}' = (2; -1; 3)$ nên giao tuyến d có VTCP $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (4; -13; -7)$. Đó cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm. Vậy phương trình của mặt phẳng cần tìm qua A, vuông góc với d.

$4(x-3) - 13(y+2) - 7(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 13y - 7z - 31 = 0$.

**Ví dụ 5**: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm B(0; 1; –1) và vuông góc với 2 mặt phẳng: (P): $10x - y + z - 1 = 0$ và (Q): $2x + y - 4z - 5 = 0$.

**Giải**

(P), (Q) có VTPT $\vec{n} = (10; -1; 1)$, $\vec{n}' = (2; 1; -4)$

Mặt phẳng cần tìm có VTPT là $[\vec{n}, \vec{n}'] = (3; 42; 12)$ hay $(1; 14; 4)$

Và đi qua $B(0; 1; -1)$ nên có phương trình:

$$1(x - 0) + 14(y - 1) + 4(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 14y + 4z - 10 = 0.$$

**Ví dụ 6:** Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x + 2y + 5z + 6 = 0$, (Q): $x - y - 3z + 3 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng (R): $3x + 2y + z - 5 = 0$.

**Giải**

Mặt phẳng (P), (Q) có VTPT $\vec{n} = (1; 2; 5)$, $\vec{n}' = (1; -1; -3)$ nên giao tuyến d có VTCP $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (-1; 8; -3)$

Giao tuyến d chứa các điểm có toạ độ thoả mãn:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x - y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{Cho } z = 0 \Rightarrow x = -4,\ y = -1.$$

Do đó mặt phẳng cần tìm qua $M(-4; -1; 0)$ và có VTPT

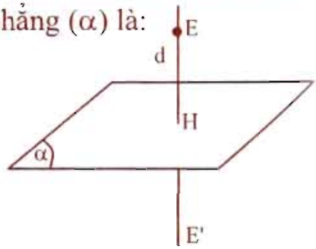
$\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{n_R}] = (14; -8; -26)$ hay $(7; -4; -13)$ nên có phương trình:

$7(x + 4) - 4(y + 1) - 13(z - 0)$ hay $7x - 4y - 13z + 24 = 0$.

**Ví dụ 7**: Trong không gian Oxyz cho điểm $E(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $x + y - 2z - 6 = 0$, gọi E' là điểm sao cho $(\alpha)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn EE'. Lập phương trình các mặt phẳng lần lượt đi qua E, E' và song song với $(\alpha)$.

**Giải**

Ta nhận thấy điểm E không thuộc $(\alpha)$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $E(1; 1; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ là:



$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Toạ độ giao điểm H của d và $(\alpha)$ ứng với giá trị của t thoả phương trình:

$$(1 + t) + (1 + t) - 2(1 - 2t) - 6 = 0.$$

$$6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 2; -1)$$

Ta có: $x_H = \dfrac{x_E + x_{E'}}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{1 + x_{E'}}{2} \Rightarrow x_{E'} = 3$

$$y_H = \frac{y_E + y_{E'}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{1 + y_{E'}}{2} \Rightarrow y_{E'} = 3$$

$$z_H = \frac{z_E + z_{E'}}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + z_{E'}}{2} \Rightarrow z_{E'} = -3.$$

Vậy điểm $E'(3; 3; -3)$. Từ đó suy ra:

Phương trình của mặt phẳng qua E, song song $(\alpha)$ là: $x + y - 2z = 0$.

Phương trình của mặt phẳng qua E', song song $(\alpha)$ là: $x + y - 2z - 12 = 0$.

**Ví dụ 8**: Cho mặt cầu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 5t - 11 \\ z = -4t + 9 \end{cases}$. Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại các giao điểm của d với mặt cầu.

**Giải**

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; -5)$, $R = 7$.

Thế toạ độ x, y, z vào phương trình mặt cầu:

$$(3t - 3)^2 + (5t - 12)^2 + (14 - 4t)^2 = 49$$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$ hoặc $t = 2$.

Do đó đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm $A(4; 4; -3)$, $B(1; -1; 1)$

– Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A có VTPT $\overrightarrow{IA} = (6; 3; 2)$ nên có phương trình: $6x + 3y + 2z - 30 = 0$.

– Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm B có VTPT $\overrightarrow{IB} = (3; -2; 6)$ nên có phương trình: $3x - 2y + 6z - 11 = 0$.

**Ví dụ 9**: Lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng d: $\frac{x - 13}{-1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z}{4}$ và tiếp xúc với mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$.

**Giải**

Tâm của (S) là $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 67} = 9$

Đường thẳng d đi qua $M(13; -1; 0)$ và $N(12; 0; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (P):

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

(P) qua M, N nên: $\begin{cases} 13A - B + D = 0 \\ 12A + 4C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B + 4C \\ D = -12B - 52C \end{cases}$

Do đó (P): $(B + 4C)x + By + Cz - 12B - 52C = 0$ (*)

Điều kiện (P) tiếp xúc (S): $d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|B + 4C + 2B + 3C - 12B - 52C|}{\sqrt{(B + 4C)^2 + B^2 + C^2}} = 9$$

$$\Leftrightarrow |B + 5C| = \sqrt{2B^2 + 8BC + 17C^2}$$

$\Leftrightarrow B^2 - 2BC - 8C^2 = 0 \Leftrightarrow B = 4C$ hoặc $B = -2C$.

Thế vào (*) và rút gọn $C \neq 0$, ta được 2 mặt phẳng:

$$2x - 2y + z - 28 = 0,\ 8x + 4y + z - 100 = 0.$$

**Ví dụ 10**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$

và đường thẳng $\Delta_1$: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$, $\Delta_2$: $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S), biết tiếp diện đó song song với hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

**Giải**

Mặt cầu (S) tâm $I(1; -1; -2)$, $R = 3$.

$\Delta_1$ đi qua điểm $A(0; 1; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$

$\Delta_2$ đi qua điểm $B(1; 0; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (-1; 1; -1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (0; 1; 1) \Rightarrow (P)\text{: } y + z + m = 0.$$

Điều kiện tiếp xúc: $d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}} = 3 \Leftrightarrow m = 3 \pm 3\sqrt{2}$.

Vậy có 2 mặt phẳng:

$$(P_1)\text{: } y + z + 3 + 3\sqrt{2} = 0,\ (P_2)\text{: } y + z + 3 - 3\sqrt{2} = 0.$$

Các điểm A, B không thuộc hai mặt phẳng nên đó là 2 mặt phẳng cần tìm.

**Ví dụ 11:** Cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - \dfrac{5}{4} = 0$.

a) Lập phương trình đường kính AB của mặt cầu song song với đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 5 \\ z = 4t + 7 \end{cases}$

b) Lập phương trình mặt phẳng (P) xác định bởi 2 đường thẳng song song AB và d nói trên.

**Giải**

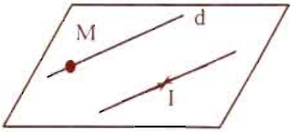
Phương trình mặt cầu viết dưới dạng:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2$$

Ta có toạ độ tâm của mặt cầu $I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$

a) Đường kính AB của mặt cầu đi qua tâm I và song song với d có VTCP: $\vec{u} = (2; -3; 4)$ nên có phương trình là:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 2t \\ y = -\dfrac{3}{2} - 3t \\ z = -\dfrac{1}{2} + 4t \end{cases}$$



b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 5; 7)$ có VTCP $\vec{u} = (2; -3; 4)$

Ta có $\overline{IM} = \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{13}{2}; \dfrac{15}{2}\right)$ nên (P) có VTPT

$$\vec{n} = [\vec{u}, 2\overline{IM}] = (-97; -42; 17)$$

Vậy phương trình (P): $97x + 42y - 17z + 6 = 0$.

**Ví dụ 12**: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa giao tuyến d của 2 mặt phẳng: $x + y + z - 3 = 0$, $2x + y + z - 4 = 0$ và hợp với mp(Oxy) góc $60^o$

**Giải**

Giao tuyến d của mặt phẳng: $x + y + z - 3 = 0$, $2x + y + z - 4 = 0$ đi qua $M(1; 1; 1)$ và có VTCP $\vec{u} = [\overrightarrow{n_1}\quad \overrightarrow{n_2}] = (0; 1; -1)$

(P): $A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Ta có VTPT $\vec{n} = (A, B, C)$ vuông góc với $\vec{u}$ nên:

$B - C = 0 \Rightarrow C = B$. Do đó (P): $Ax + By + Bz - A - 2B = 0$

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\varphi = 60^o \Leftrightarrow \left|\cos(\vec{n}, \vec{k})\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|B|}{\sqrt{A^2 + 2B^2}} = \dfrac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow A^2 = 2B^2 \Leftrightarrow A = \pm B\sqrt{2}.$$

Từ đó tìm được 2 mặt phẳng (P):

$$\sqrt{2}x + y + z - \sqrt{2} - 2 = 0,\ \sqrt{2}x - y - z - \sqrt{2} + 2 = 0.$$

**Ví dụ 13**: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d: $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và hợp với mặt phẳng (Q): $2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc bé nhất.

**Giải**

Gọi (P): $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Vì (P) chứa d nên đi qua $M(0; -1; 2)$, $N(-1; 1; 3)$:

$$\begin{cases} -B + 2C + D = 0 \\ -A + B + 3C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ D = B - 2C \end{cases}$$

Do đó (P): $(2B + C)x + By + Cz + B - 2C = 0$.

Mp(Q) có VTPT $\vec{n}' = (2; -1; -2)$. Gọi $\varphi$ là góc giữa 2 mặt phẳng thì:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}, \vec{n}')\right| = \frac{|B|}{\sqrt{5B^2 + 4BC + 2C^2}}$$

Xét $B = 0$ thì $\varphi = 90^o$

Xét $B \neq 0$, đặt $m = \dfrac{C}{B}$ thì:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2m^2 + 4m + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu " = " khi $m = -1$ nên $B = -C$, khi đó $\varphi < 90^o$ là góc cần tìm.

Vậy (P): $x + y - z + 3 = 0$.

**Ví dụ 14**: Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng ($\Delta$): $\dfrac{x - 2}{-3} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 1}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng

ABC

(P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$, (Q): $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

**Giải**

Ta có (P), (Q) song song nên tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn AB với A, B là giao điểm của (Δ) và 2 mặt phẳng đó (Δ) cắt (P) tại A(2; 1; 1), cắt (Q) tại B(–4; 5; 5) nên tâm I(–1; 3; 3).

Ta có $R = d(I, (P)) = \dfrac{|-1 + 2.3 - 2.3 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

**Ví dụ 15**: Lập phương trình mặt cầu tâm A(–1; 2; 3) và tiếp xúc với đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$

**Giải**

Bán kính R = d(A; d)

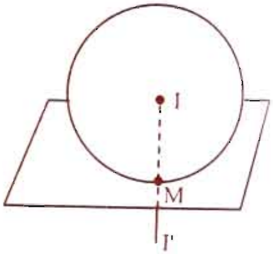
Ta có d qua B(2; 1; 0) và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 1)$ nên

$$d(A; d) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{165}}{3}$$

Vậy phương trình mặt cầu: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = \dfrac{55}{3}$

**Ví dụ 16:** Lập phương trình mặt cầu có bán kính R = 3 và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z + 3 = 0$ tại điểm M(1; 1; –3).

**Giải**



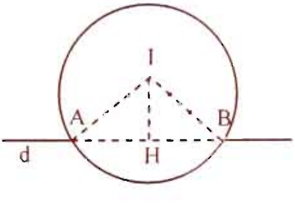
Tâm I của mặt cầu nằm trên đường thẳng d đi qua M(1; 1; –3) và vuông góc với (P):
$x + 2y + 2z + 3 = 0$ nên có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 2)$.
Do đó I(1 + t; 1 + 2t; –3 + 2t).
Khoảng cách $MI = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 4t^2 + 4t^2} = 3$
$\Leftrightarrow 3|t| = 3 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 1$.
Do đó tâm có toạ độ I(0; –1; –5) hoặc I'(2; 3; –1).
Vậy có 2 mặt cầu: $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$,
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

**Ví dụ 17**: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I(2; 3; –1), cắt đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2t \\ y = -\dfrac{11}{2} + t \\ z = -14 - 2t \end{cases}$$ tại 2 điểm A, B mà AB = 40.

**Giải**

Gọi H là trung điểm dây AB thì IH vuông góc với AB. Mặt phẳng (P) qua I, vuông góc với d có phương trình: $2x + y - 2z - 9 = 0$, suy ra giao điểm d và (P) là: H(–3; –7; –11).



Ta có $R^2 = IA^2 = AH^2 + IH^2 = 20^2 + 15^2 = 225$.

Vậy (S): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 225$

Cách khác: $IH = d(I, d) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{M_oI}, u]\right|}{|\vec{u}|}$

**Ví dụ 18**: Cho (P): $5x - 4y + z - 6 = 0$, (Q): $2x - y + z + 7 = 0$ và d là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x - y + 2z - 3 = 0$, $x - 3y - z = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I là giao điểm của d với (P), cắt (Q) theo đường tròn có chu vi $4\pi\sqrt{5}$.

**Giải**

Tâm I(x; y; z) có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x - 4y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \text{nên } I(1; 0; 1)$$

Ta có $d = d(I, (Q)) = \dfrac{|2.1 - 0 + 1 + 7|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{10}{\sqrt{6}}$

Đường tròn giao tuyến có chu vi $4\pi\sqrt{5} = 2\pi r$ nên có bán kính $r = 2\sqrt{5}$, do đó $R^2 = d^2 + r^2 = \dfrac{110}{3}$

Vậy phương trình (S): $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \dfrac{110}{3}$

## DẠNG 3: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI, TƯƠNG GIAO

- **Phương pháp chung:**

Tuỳ theo dạng phương trình đường thẳng và mặt phẳng cho mà ta chọn cách xét vị trí tương đối.

Có 3 hướng chính là hệ phương trình tương giao, quan hệ các vectơ VTCP, VTPT, vectơ nối 2 điểm của 2 đường thẳng và quan hệ thuộc (điểm của yếu tố này có thuộc yếu tố kia không).

**Vị trí tương đối của 2 đường thẳng:**

d qua $A(x_A, y_A, z_A)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$

d' qua $B(x_B, y_B, z_B)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (a', b', c')$

Có 4 vị trí tương đối:

– Chéo nhau: $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$

– Cắt nhau: $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} = 0$ và $a : b : c \neq a' : b' : c'$

Ta có thể giải hệ theo 2 tham số t, t' để tìm cặp nghiệm duy nhất tương ứng với giao điểm của 2 đường thẳng .

– Trùng nhau: $a : b : c = a' : b' : c' = (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

– Song song: $a : b : c = a' : b' : c' \neq (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

### Vị trí tương đối của 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng:

Đường thẳng d qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) qua $M_0$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$

Có 3 vị trí tương đối:

– Cắt nhau: $\vec{u}\ \ \vec{n} \neq 0$

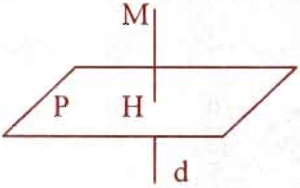
Ta có thể giải hệ theo 3 ẩn x, y, z để tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng, hoặc thế x, y, z theo tham số t vào phương trình mặt phẳng để tìm t, từ đó suy ra tọa độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

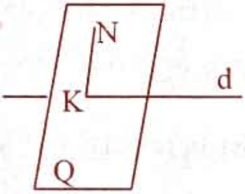
– Song song: $\vec{u}\ \ \vec{n} = 0$ và $A \notin (P)$

– Đường thẳng thuộc mặt phẳng: $\vec{u} . \vec{n} = 0$ và $A \in (P)$

### Hình chiếu của một điểm lên mặt phẳng:

Hình chiếu điểm M trên mặt phẳng (P): Lập phương trình tham số đường thẳng d qua M vuông góc với (P). Hình chiếu H là giao điểm của d với (P). Từ đó suy ra điểm M' đối xứng của M qua (P) nhờ H là trung điểm MM'





### Hình chiếu của một điểm lên đường thẳng

Hình chiếu điểm N trên đường thẳng d: Lập phương trình mặt phẳng (Q) qua N vuông góc với d. Hình chiếu K là giao điểm của d với (Q). Ta có thể dùng toạ độ K thuộc d theo tham số t rồi tìm t nhờ điều kiện: $\overline{NK}.\overline{u_d} = 0$. Từ đó suy ra điểm N' đối xứng của N qua đường thẳng d nhờ H là trung điểm NN'

**Ví dụ 1**: Tìm hình chiếu của điểm A(1; 4; 2) lên mặt phẳng:

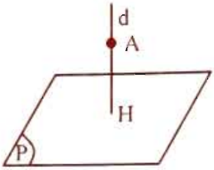
(P): $x + 2y + z - 1 = 0$. Suy ra khoảng cách từ A đến (P).

**Giải**

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P), H là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Ta có $\vec{n} = (1; 2; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) nên $\vec{n}$ là một vectơ chỉ phương của d.

ABC



Suy ra, d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{1}$

Toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{1}\\ x+2y+z-1=0\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{1}{3}$. Vậy: $H(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3})$

Suy ra $d(A,(P))=AH=\sqrt{\left(1+\frac{2}{3}\right)^2+\left(4-\frac{2}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$

**Ví dụ 2:** Cho bốn điểm A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1). Tìm hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC).

**Giải**

Ta có $\overline{AB}=(-1;2;-3)$, $\overline{AC}=(-3;4;1)$ nên mp(ABC) có VTPT

$\vec{n}=[\overline{AB},\overline{AC}]=(14;10;2)$ hay $(7;5;1)$.

(P): $7(x-4)+5(y-1)+1(z-4)=0$ hay $7x+5y+z-37=0$.

Đường thẳng d qua D, vuông góc với (ABC) có phương trình tham số:

$\begin{cases}x=1+7t\\ y=1+5t\\ z=1+t\end{cases}$. Thế x, y, z vào (P) thì $t=\frac{8}{25}$

Vậy hình chiếu có toạ độ $H\left(\frac{81}{25};\frac{13}{5};\frac{33}{25}\right)$.

**Ví dụ 3**: Tìm điểm đối xứng của A(1; 2; –3) qua mặt phẳng (P): $2x+2y-z+9=0$.

**Giải**

Hình chiếu H của A lên (P) thuộc đường thẳng d đi qua A(1; 2; –3) có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$ nên có phương trình tham số d: $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-3-t\end{cases}$

Gọi A' đối xứng với A qua (P) thì H là trung điểm của AA'.

Vì $H\in d$ nên toạ độ của H có dạng $(1+2t;2+2t;-3-t)$ do $H\in(P)$ nên $2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0$.

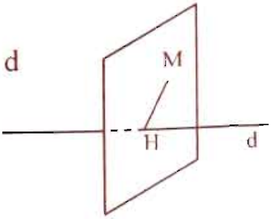
Suy ra: $t=-2$ nên H(–3; –2; –1).

Vậy A'(–7; –6; 1).

**Ví dụ 4:** Tìm hình chiếu của M(2; –1; 1) lên đường thẳng d: $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1-t\\ z=2t\end{cases}$

ABC

**Giải**



Hình chiếu H của M lên d là giao điểm của d với mặt phẳng (P) qua M, vuông góc d:

$$2(x - 2) - 1(y + 1) + 2(z - 1) = 0$$

hay $2x - y + 2z - 7 = 0$.

H thuộc d nên $H(1 + 2t; -1- t; 2t)$.

Thế toạ độ vào mp(P) thì được $t = \frac{4}{9}$ nên $H\left(\frac{17}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{8}{9}\right)$

Cách khác: Dùng điều kiện $\overline{MH} . \vec{u} = 0$ để tìm t.

**Ví dụ 5:** Tìm điểm đối xứng của A(−2; 3; −4) qua đường thẳng

d: $\frac{x+2}{-3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$

**Giải**

d qua M(−2; −2; 0) có VTCP $\vec{u} = (-3; -2; 1)$

Hạ AH $\perp$ d thì $H(-2 - 3t; -2 - 2t; t) \in d$.

Ta có $\overline{AH} . \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = -1$ nên H(1; 0; −1)

Điểm B đối xứng của A qua d nên A là trung điểm của AB.

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_H = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_H = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_H - x_A = 4 \\ y_B = 2y_H - y_A = -3 \\ z_B = 2z_H - z_A = 2 \end{cases}$$

Vậy điểm đối xứng là B(4; −3; 2).

**Ví dụ 6**: Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng:

a) d : $\frac{x-1}{2} = y - 7 = \frac{z-3}{4}$ d' : $\frac{x-3}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$

b) d : $\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{3}$ d' : $\frac{x-7}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-5}{2}$

**Giải**

a) Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 7; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 4)$

Đường thẳng d' đi qua điểm M'(3; −1; −2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (6; -2; 1)$

Ta có: $\overline{MM}\,' = (2; -8; -5)$ ; $[\vec{u}, \vec{u}\,'] = (9; 22; -10) \neq \vec{0}$

nên $[\vec{u}, \vec{u}\,'] . \overline{MM}\,' = -108 \neq 0$.

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

b) Đường thẳng d qua điểm M(1; 2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (9; 6; 3)$; đường thẳng d' qua điểm M'(7; 6; 5) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (6; 4; 2)$.

Ta có 9 : 6 : 3 = 6 : 4 : 2. Do đó d và d' song song hoặc trùng nhau.

ABC

Mặt khác $\overline{MM}' = (6; 4; 2) = \vec{u}'$

Vậy hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

**Ví dụ 7:** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng

a) $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ $\qquad d': \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$

b) $d: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$ $\qquad d': \dfrac{x-7}{-6} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{z}{12}$

**Giải**

a) d qua M(1; –5; 3) và có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 4)$

d' qua M'(6; –1; –2) và có VTCP $\vec{u}' = (3; 2; 1)$.

Ta có $[\vec{u}, \vec{u}'] = (-7; 10; 1)$, $\overline{MM}' = (5; 4; -5)$ nên

$[\vec{u}, \vec{u}']\ \ \overline{MM}' = -35 + 40 - 5 = 0$, do đó d và d' đồng phẳng.

Vì $[\vec{u}, \vec{u}'] \neq \vec{0}$ nên 2 đường thẳng cắt nhau.

b) d qua M(2; 0; –1) và có VTCP $\vec{u} = (4; -6; -8)$

d' qua M'(7; 2; 0) và có VTCP $\vec{u}' = (-6; 9; 12)$

Ta có $\vec{u}' = -\dfrac{3}{2}\vec{u}$ nên d, d' hoặc song song hoặc trùng nhau.

Hơn nữa $\overline{MM}' = (5; 2; 1)$ không cùng phương với $\vec{u}$, $\vec{u}'$ nên 2 đường thẳng song song nhau.

**Ví dụ 8**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t, \\ z = t \end{cases} \quad d_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}.$$

Chứng minh 2 đường thẳng chéo nhau.

**Giải**

$d_1$ qua $M_1(2; 2; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (-2; 1; 1)$

$d_2$ qua $M_2(1; 0; 2)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-2; 3; 1)$

Ta có $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-2; 0; -4)$, $\overline{M_1M_2} = (-1; -2; 2)$

nên $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overline{M_1M_2} = 2 + 0 - 8 = -6 \neq 0$.

Vậy 2 đường thẳng chéo nhau.

**Ví dụ 9**: Chứng minh hai đường thẳng sau song song nhau $d: \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

và d' là giao tuyến của hai mặt phẳng:

$(\alpha)$: $x + y - z = 0$, $(\alpha')$: $2x - y + 2z = 0$.

**Giải**

Đường thẳng d đi qua điểm M(0; –3; –3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -4; -3)$.

ABC

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (1; -4; -3)$.

Do đó, d và d' có cùng vectơ chỉ phương, ngoài ra vì điểm $M(0; -3; -3)$ không nằm trên d' nên hai đường thẳng song song nhau.

**Ví dụ 10**: Chứng minh rằng hai đường thẳng:

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \qquad d' : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

cùng nằm trong một mặt phẳng. Lập phương trình mặt phẳng ấy.

**Giải**

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -2 - 3s \\ z = 5 + 4s \end{cases}$

Để tìm giao điểm của hai đường thẳng ta giải hệ:

$$\begin{cases} 1 + 2s = 7 + 3t \\ -2 - 3s = 2 + 2t \\ 5 + 4s = -1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = -2 \end{cases}$$

Suy ra có giao điểm $A(1; -2; 5)$ nên d và d' cắt nhau. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng chứa d và d' là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{u}\,'] = (1; 18; 13)$.

Vậy phương trình mặt phẳng chứa d và d' là:

$$1(x-1) + 18(y+2) + 13(z-5) = 0 \Leftrightarrow x + 18y + 13z - 30 = 0.$$

**Ví dụ 11:** Cho điểm $A(1; -1; 1)$ và hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3t \end{cases} \qquad (d_2): \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 4 + 5t' \end{cases}$$

Chứng minh $(d_1)$, $(d_2)$ và A cùng thuộc một mặt phẳng.

**Giải**

$(d_2)$ qua $B(0; 1; 4)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 5)$

$Mp(A, d_2)$ qua B và có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}\quad \overrightarrow{AB}] = (-4; -8; 4)$ hay $(1; 2; -1)$ nên có phương trình:

$$1(x-1) + 2(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0$$

Ta có $(d_1)$ qua $M(0; -1; 0)$ và $N(-1; 1; 3)$

Vì M, N thuộc $mp(A, d_2)$ nên $d_1$ thuộc $mp(A, d_2)$

Vậy A, $(d_1)$, $(d_2)$ cùng thuộc một mặt phẳng.

**Ví dụ 12:** Cho bốn đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2} \qquad (d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$$

$$(d_3): \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad (d_4): \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Chứng minh tồn tại một đường thẳng (d) cắt cả bốn đường thẳng đó. Viết phương trình chính tắc của (d).

**Giải**

$(d_1)$ qua $A(1; 2; 0)$, $A \notin (d_2)$, $(d_1)$ và $(d_2)$ cùng có vectơ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$ nên $(d_1) // (d_2)$. $(d_2)$ qua $B(2; 2; 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua $(d_1)$, $(d_2)$ là: PT của (P) là $y + z - 2 = 0$

$$(d_3) \cap (P) = E\left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ và } (d_4) \cap (P) = F(4; 2; 0)$$

Đường thẳng (d) qua E, F là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{-1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2; 1; -1)$ không cùng phương với $\vec{u}$. Vậy (d) cắt cả bốn đường thẳng đã cho.

**Ví dụ 13**: Xác định giá trị của D để đường thẳng giao tuyến của 2 mặt phẳng: $2x + 3y - z + D = 0$ và $3x - 2y + 2z - 6 = 0$

a) cắt trục Ox b) cắt trục Oy c) cắt trục Oz.

**Giải**

a) Trục Ox: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Giao tuyến đã cho cắt trục Ox thì hệ phương trình sau phải có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ D = -4 \end{cases} \quad \text{Vậy } D = -4.$$

b) Trục Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Giải tương tự thì $D = 9$.

c) Trục Oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Giải tương tự thì $D = 3$.

**Ví dụ 14**: Xét vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

a) d: $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$, (P): $3x + 5y - z - 2 = 0$.

b) d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ (P): $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

c) d: $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$, (P): $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

**Giải**

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; 1)$ và (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5; -1)$ suy ra $\vec{u}.\vec{n} = 12 + 15 - 1 = 26 \neq 0$. Vậy d cắt (P).

ABC

b) d qua A(−1; 3; 0) và có VTCP $\vec{u} = (2; 4; 3)$

Mp(P) có VTPT $\vec{n} = (3; -3; 2)$. Ta có $\vec{u}.\vec{n} = 6 - 12 + 6 = 0$ nên hoặc d song song (P) hoặc d thuộc (P).

Ta có A ∉ (P) nên d // (P).

c) d qua M(13; 1; 4) và có VTCP $\vec{u} = (8; 2; 3)$

Mp(P) có VTPT $\vec{n} = (1; 2; -4)$ nên $\vec{n}.\vec{u} = 0$ mà M ∈ (P) nên d nằm trên (P).

**Ví dụ 15**: Chứng minh đường thẳng:

a) d: $\begin{cases} x = 5t \\ y = -\dfrac{7}{5} + 9t \\ z = \dfrac{2}{5} + t \end{cases}$ thuộc mp(P): $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

b) d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ cắt (P): $4x - y + 5z - 1 = 0$.

### Giải

a) d qua $A(0; -\frac{7}{5}; \frac{2}{5})$ và có VTCP $\vec{u} = (5; 9; 1)$

Mp(P) có VTPT $\vec{n} = (4; -3; 7)$.

Ta có: $\vec{n}.\vec{u} = 0$ và A ∈ (P) nên d nằm trên (P).

b) d có VTCP $\vec{u} = (2; 3; 4)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (4; -1; 5)$.

Ta có $\vec{n}.\vec{u} = 8 - 3 + 20 = 25 \neq 0$ nên d cắt mp(P).

**Ví dụ 16:** Tìm giao điểm của đường thẳng:

a) d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ với (P): $2x - y + 5z - 4 = 0$.

b) d là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x + y - 2z - 11 = 0$, $3x - y + z - 6 = 0$ với (P): $x + 2y - z - 15 = 0$.

c) d là giao tuyến 2 mặt phẳng: $2x - y + z - 6 = 0$, $x + 4y - 2z - 8 = 0$ với các mặt toạ độ.

### Giải

a) Giao điểm thuộc d nên M(1 + 2t; 2 − t; 3t) và thuộc (P) nên:

$$2(1 + 2t) - (2 - t) + 15t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{5}$$

Thay $t = \frac{1}{5}$ vào ta được $M\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

b) Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ:

ABC

$$\begin{cases} x + y - 2z - 11 = 0 \\ 3x - y + z - 6 = 0 \\ x + 2y - z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{Vậy } M(4; 5; -1).$$

c) Mp(xOy) : z = 0. Toạ độ giao điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 4y - 2z = 8 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{32}{9} \\ y = \dfrac{10}{9} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Vậy } A\left(\frac{32}{9}; \frac{10}{9}; 0\right).$$

Giải tương tự thì giao điểm với mp(xOz) là B(4; 0; –2) và với mp(yOz) là C(0; 10; 16).

**Ví dụ 17**: Tìm k để đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $2kx + y - z + 1 = 0$, (Q): $x - ky + z - 1 = 0$ nằm trong mặt phẳng (Oyz)

**Giải**

Giao tuyến d có VTCP:

$$\vec{u} = \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -k & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} \right) = (1 - k; -1 - 2k; -2k^2 - 1)$$

Mp(Oyz) có VTPT $\vec{i} = (1; 0; 0)$

Để d nằm trong mặt phẳng (Oyz) thì cần có:

$$\vec{i}\ \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (1 - k)1 + (-1 - 2k).0 + (-2k^2 - 1).0 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Thay k = 1 vào phương trình của 2 mặt phẳng chứa d:

(P): $2x + y - z + 1 = 0$, (Q): $x - y + z - 1 = 0$.

Ta có điểm M(0; 0; 1) thuộc d và cùng thuộc mặt phẳng (Oyz) nên thoả mãn.

Vậy để d nằm trong mặt phẳng (Oyz) thì cần và đủ là: k = 1.

**Ví dụ 18:** Trong không gian có hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 20 = 0$. Xác định toạ độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

**Giải**

Ta có $\overline{AB} = (-1; 1; 2)$, phương trình AB: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

D thuộc đường thẳng AB ⇒ D(2 – t; 1 + t; 2t) ⇒ $\overline{CD} = (1 - t; t; 2t)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (1; 1; 1)$

Vì C không thuộc mặt phẳng (P) nên:

ABC

$CD \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow 1.(1-t) + 1.t + 1.2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

Vậy $D(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1)$.

**Ví dụ 19:** Chứng minh các mặt phẳng $(P_m)$: $(2+m)x + (1+m)y + (1+m)z + m - 1 = 0$ luôn đi qua một đường thẳng cố định.

**Giải**

$(P_m)$: $2x + y + z - 1 + m(x + y + z + 1) = 0$.

Mặt phẳng $(P_m)$ đi qua các điểm $M(x; y; z)$ có toạ độ không phụ thuộc m khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Cho $y = 0$ thì $x = 2$, $z = -3$: $A(2; 0; -3)$

Cho $z = 0$ thì $x = 2$, $y = -3$: $B(2; -3; 0)$.

Vậy các mặt phẳng $(P_m)$ đi qua đường thẳng cố định là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $2x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ tức là đường thẳng AB cố định.

**Ví dụ 20**: Chứng minh các đường thẳng $d_k$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x + kz - k = 0$, $(1-k)x - ky = 0$, $k \neq 0$ luôn nằm trên mặt phẳng cố định.

**Giải**

Giao tuyến $d_k$ chứa các điểm $M(x; y; z)$ có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1-k)x - ky = 0 \end{cases}; k \neq 0.$$

Suy ra: $x - (1-k)x + kz - k + ky = 0$.

$\Rightarrow k(x + y + z - 1) = 0 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0$, vì $k \neq 0$.

Vậy các đường thẳng $d_k$ luôn luôn nằm trong mặt phẳng cố định (P): $x + y + z - 1 = 0$.

**Ví dụ 21**: Cho đường thẳng (d) với tham số $\alpha$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng:

$$x.\cos\alpha + y.\sin\alpha + z.\sin\alpha = 6\sin\alpha + 5\cos\alpha$$

$$x.\sin\alpha - y.\cos\alpha + z.\cos\alpha = 2\cos\alpha - 5\sin\alpha$$

a) Chứng minh đường thẳng (d) không cắt mặt phẳng (P): $x.\sin2\alpha - y.\cos2\alpha + z - 1 = 0$.

b) Gọi $(\Delta)$ là hình chiếu vuông góc của (d) trên mặt phẳng (Oxy). Chứng minh khi $\alpha$ thay đổi, đường thẳng $(\Delta)$ tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**Giải**

a) (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng có các vectơ pháp tuyến

$\overrightarrow{n_1} = (\cos\alpha; \sin\alpha; \sin\alpha)$,

$\overrightarrow{n_2} = (\sin\alpha; -\cos\alpha; \cos\alpha)$ nên có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (\sin2\alpha; -\cos2\alpha; -1)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overline{n} = (\sin 2\alpha\ ; -\cos 2\alpha;\ 1)$.

Ta có $\vec{u}\,.\,\overline{n} = \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 1 = 0$ nên (d) không cắt (P)

b) Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$.

Khử z trong PT đường thẳng (d) được PT của (Δ) trong mp(Oxy) là:

$$x.\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha - 5 = 0.$$

Trong mặt phẳng $z = 0$, khoảng cách từ điểm I(0; 2; 0) đến (Δ) là:

$D(I, (\Delta)) = \dfrac{|0.\cos 2\alpha + 2.\sin\alpha - 2\sin 2\alpha - 5|}{\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}} = 5$: không đổi nên (Δ) tiếp xúc với đường tròn tâm I(0; 2; 0), R = 5 trên mp(Oxy).

**Ví dụ 22**: Tìm tâm và bán kính các đường tròn giao tuyến:

a) (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$ và (P): $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0 \\ 2x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

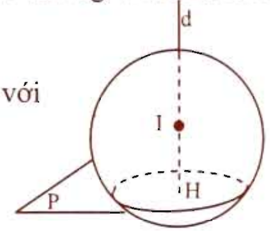
### Giải

a) (S) có tâm I(3; −1; 1), bán kính R = 1.

Tâm H là hình chiếu của I lên (P). Phương trình của đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y - 2z + 1 = 0$ là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$.

Từ đó ta suy ra giao điểm H của d và mặt phẳng ứng với t = 0 là H(3; −1; 1). Vì điểm H trùng với I nên (P) là mặt kính cắt theo đường tròn lớn nên bán kính đường tròn giao tuyến r = R = 1.

b) (S) có tâm I(6; −2; 3), R = 5.



Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng $2x + 2y + z + 1 = 0$ là: $\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Từ đó suy ra giao điểm H của d và mặt phẳng ứng với $t = -\dfrac{4}{3}$ là tâm đường tròn giao tuyến $H\left(\dfrac{10}{3}; -\dfrac{14}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$

Bán kính $r^2 = R^2 - IH^2 = 25 - 16 = 9$. Vậy r = 3.

**Ví dụ 23**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ và tính bán kính của đường tròn đó.

### Giải

(S) có tâm I(1; 2; 3), bán kính R = 5.

Khoảng cách từ I đến (P): $d(I, (P)) = \dfrac{|2-4-3-4|}{3} = 3 < R$,

ABC

suy ra (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến thì H là hình chiếu vuông góc của I trên (P):

$$IH = d(I; (P)) = 3,\ r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$$

Phương trình IH: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Thế x, y, z vào (P) thì được t = 1 nên tâm H(3; 0; 2).

**Ví dụ 24**: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$ và đường thẳng (d) đi qua A(2; 1; 0) có vectơ phương $\bar{u} = (1; m; -2)$. Biện luận theo m số giao điểm của (S) và (d).

**Giải**

Điểm M(x; y, z) thuộc (d) nên $x = t + 2$, $y = mt + 1$, $z = -2t$. Thay vào (S) được: $(t + 2)^2 + (mt + 1)^2 + 4t^2 - 2(t + 2) + 6(mt + 1) + 8t + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (5 + m^2)t^2 + 2(5 + 4m)t + 20 = 0$.

Ta có $\Delta' = (5 + 4m)^2 - 20(5 + m^2) = -4m^2 + 40m - 75$. Biện luận:

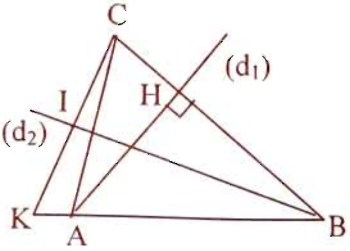
– Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$: (d) cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

– Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$ hoặc $m = \frac{15}{2}$: (d) tiếp xúc với (S) tại một điểm.

– Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$ hoặc $m > \frac{15}{2}$: (d) và (S) không có điểm chung.

**Ví dụ 25**: Cho tam giác ABC có C(3; 2; 3), đường cao AH nằm trên đường thẳng $(d_1)$: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$. đường phân giác trong BM của góc B nằm trên đường thẳng $(d_2)$: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$ Tìm đỉnh A và B.

**Giải**



1) Mặt phẳng (P) qua C, $\perp (d_1)$ là:

$$1.(x - 3) + 1.(y - 2) - 2.(z - 3) = 0$$

$\Leftrightarrow x + y - 2z + 1 = 0$.

$(P) \cap (d_2) = B(1; 4; 3)$

Mặt phẳng (Q) qua C, $\perp (d_2)$ là:

$$1.(x - 3) - 2.(y - 2) + 1.(z - 3) = 0$$

$\Leftrightarrow x - 2y + z - 2 = 0$

$(Q) \cap (d_2) = I(2; 2; 4)$

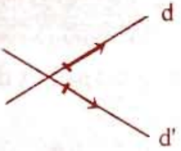
K đối xứng với C qua $(d_2)$ thì K nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB. Vì I là trung điểm của CK nên K(1; 2; 5).

Đường thẳng (Δ) đi qua KB là : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$. Do đó: (Δ) cắt $(d_1)$ tại A(1; 2; 5).

# DẠNG 4: GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

**Góc giữa 2 đường thẳng:** d có VTCP $\vec{u}$ và d' có VTCP $\vec{v}$

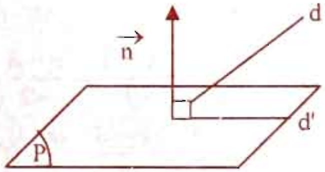
$$\cos(d, d') = \left|\cos(\vec{u}, \vec{v})\right|$$



**Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

d có VTCP $\vec{u}$ và (P) có VTPT $\vec{n}$

$$\sin(d, (P)) = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right|$$



**• Chú ý:**

– Góc giữa 2 vectơ từ 0° đến 180° và các góc còn lại giữa đường thẳng, mặt phẳng đều từ 0° đến 90°

– Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó lên mặt phẳng.

**Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:**

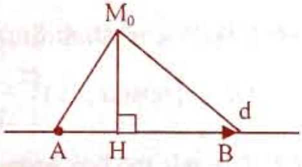
(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ là: $d(M_0, (P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

**Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng:**

Cho $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và đường thẳng d qua A và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$S(M_0AB) = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AM_0}, \overrightarrow{AB}]\right| = \frac{1}{2}AB.M_0H$$

nên: $d(M_0, d) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$



**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:**

Đường thẳng $d_1$ qua $M_1$ và có VTCP $\vec{u}_1$

Đường thẳng $d_2$ qua $M_2$ và có VTCP $\vec{u}_2$

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}$$

**• Chú ý:**

– Khoảng cách giữa các yếu tố song song là khoảng cách từ 1 điểm chọn trên yếu tố này đến yếu tố kia.

– Khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau là khoảng cách từ đường này đến mặt phẳng chứa đường kia và song song với nó.

– Đường cao của tứ diện là khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng đối diện.

– Ta có thể tìm chân hình chiếu của một điểm lên đường thẳng, mặt phẳng để đưa về khoảng cách giữa 2 điểm.

– Ứng dụng tọa độ trong không gian để giải các bài toán hình không gian cổ điển, quan hệ song song, vuông góc, độ dài, góc, khoảng cách, vị trí tương đối,…

**Ví dụ 1**: Tính góc tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng:

a) d: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$ (P): $y - z = 0$

b) d: $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. (P): $x + y - z + 2 = 0$

d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$, (P): $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

**Giải**

Gọi φ là góc giữa d và (P) thì $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$

a) d có VTCP $\vec{u} = (-1; 0; 1)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (0; 1; -1)$

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

b) d có VTCP $\vec{u} = (4; 1; -2)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (1; 1; -1)$

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|4+1+2|}{\sqrt{16+1+4}.\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{63}}.$$

c) d có VTCP $\vec{u} = (2; 4; 3)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (3; -3; 2)$

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|6-12+6|}{\sqrt{4+16+9}.\sqrt{9+9+4}} = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$$

**Ví dụ 2**: Tìm góc tạo bởi đường thẳng $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ với các trục toạ độ.

**Giải**

Đường thẳng đã cho có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 1)$, các trục Ox, Oy, Oz lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Từ đó góc tạo bởi đường thẳng đã cho với các trục Ox, Oy, Oz có số đo sao cho cosin của nó lần lượt bằng:

$$\cos\varphi_1 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{i})\right| = \frac{|2|}{\sqrt{6}.\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos\varphi_2 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{j})\right| = \frac{|1|}{\sqrt{6}.\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\cos\varphi_3 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{k})\right| = \frac{|1|}{\sqrt{6}.\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

ABC

**Ví dụ 3**: Tìm góc tạo bởi các cặp đường thẳng sau đây:

a) d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ d' : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

b) d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 6 \end{cases}$ d' : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -5 \\ z = 2t \end{cases}$

**Giải**

Gọi $\varphi$ là góc giữa 2 đường thẳng thì $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$

a) d, d' có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 4)$, $\vec{u}' = (-1; 3; 2)$

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{u}')| = \frac{|-2 + 3 + 8|}{\sqrt{4 + 1 + 16}.\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{294}}$$

b) d, d' có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 0)$, $\vec{u}' = (-2; 0; 2)$

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{u}')| = \frac{|-2|}{\sqrt{2}.\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

**Ví dụ 4**: Cho tứ diện ABCD có A(3; 2; 6), B(3; −1; 0), C(0; −7; 3) và D(−2; 1; −1).

a) Tính góc giữa các cặp cạnh đối.

b) Tính góc giữa đường thẳng AD với mp(ABC).

**Giải**

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -3; -6)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 8; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ do đó g(AB, CD) = 90°

Tương tự $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ nên góc giữa các cặp đối đều bằng $90^\circ$.

b) Đường thẳng AD có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{DA} = (5; 1; 7)$

Mp(ABC) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; -2; 1)$

Gọi $\varphi$ là góc giữa AD với mp(ABC) thì: $\sin\varphi = |\cos(\overrightarrow{DA}, \vec{n})| = \frac{\sqrt{10}}{5}$

**Ví dụ 5:** Cho đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x - z.\sin\alpha + \cos\alpha = 0$, (Q); $y - z.\cos\alpha - \sin\alpha = 0$. Chứng minh đường thẳng d tạo với trục Oz một góc không đổi.

**Giải**

(P) có VTPT $\vec{n} = (1; 0; -\sin\alpha)$

(Q) có VTPT $\vec{m} = (0; 1; -\cos\alpha)$

Do đó d có VTCP $u = [\vec{n}, \vec{m}] = (\sin\alpha; \cos\alpha; 1)$

Trục Oz có VTCP $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Ta có $|\cos(d; Oz)| = |\cos(\vec{u}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy đường thẳng d hợp Oz góc $45^\circ$ không đổi.

ABC

**Ví dụ 6**: Cho M(1; 0; 2), N(1; 1; 0), P(0; 1; 2). Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm mp(MNP) với Ox, Oy, Oz.

a) Chứng minh ba đường thẳng AP, BM, CN đồng qui tại G.

b) Gọi $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ là các góc tạo bởi $\overrightarrow{OG}$ với $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Chứng minh $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$.

**Giải**

a) $\overrightarrow{MN} = (0; 1; -2)$, $\overrightarrow{NP} = (-1; 0; 2)$ nên tìm được mặt phẳng (MNP): $2x + 2y + z - 4 = 0$.

Cho $y = z = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2; 0; 0)$

$z = x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0; 2; 0)$

$x = y = 0 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0; 0; 4)$

Ta có NA = NB, PB = PC, MA = MC nên trong tam giác ABC thì 3 trung tuyến AP, BM, CN đồng qui tại trọng tâm $G(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$.

b) Ta có $\overrightarrow{OG} = (\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$, $\overrightarrow{OA} = (2; 0; 0)$ nên

$$\cos\varphi_1 = \cos(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Tương tự $\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\varphi_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 7**: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ:

a) M(2; 3; 1), $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$

b) M(2; 3; −1), Δ đi qua điểm $M_o(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{4})$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-4; 2; -1)$.

**Giải**

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(-2; 1; -1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{M_oM} = (4; 2; 2)$, $[\vec{u}, \overrightarrow{M_oM}] = (8; -10; -6)$.

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d = \frac{\left|[\vec{u}, \overrightarrow{M_oM}]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

Cách khác: Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M(2; 3; 1) và vuông góc với Δ thì (α) có vectơ pháp tuyến (1; 2; −2), (α) có phương trình:

$x - 2 + 2(y - 3) - 2(z - 1) = 0$ hay $x + 2y - 2z - 6 = 0$.

Từ đó tìm được toạ độ giao điểm H của (α) và Δ là:

$$H\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{9}; \frac{17}{9}\right) \Rightarrow d(M, \Delta) = MH = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

ABC

b) Ta có $\overline{M_oM} = \left(\frac{5}{2}; 3; -\frac{1}{4}\right)$ ; $[\vec{u}, \overline{M_oM}\,] = \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; -17\right)$

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d = \dfrac{\left|\left[\vec{u},, \overline{M_oM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{\sqrt{2870}}{14}$

**Ví dụ 8**: Tìm khoảng cách từ điểm A(2; 3; –1) đến đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x + y - 2z - 1 = 0$, (Q): $x + 3y + 2z + 2 = 0$.

**Giải**

(P): $x + y - 2z - 1 = 0$, (Q): $x + 3y + 2z + 2 = 0$.

Cho z = 0 thì $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Do đó giao tuyến d đi qua $M_o\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$ và có VTCP

$\vec{u} = [\overrightarrow{n_P} \quad \overrightarrow{n_Q}\,] = (8; -4; 2)$ hay $(4; -2; 1)$.

Do đó $d(\Delta, d) = \dfrac{\left|\left[\overline{AM_o}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\left[\vec{u}\right]\right|} = \sqrt{\dfrac{205}{14}}$

**Ví dụ 9:** Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng sau:

a) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $d' : \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3 \end{cases}$

b) $d : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y - 4}{1} = \dfrac{z + 1}{-2}$ $\qquad$ $d' : \begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t \end{cases}$

**Giải**

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_1(1; -1; 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; -1; 0)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M_2(2; -2; 3)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-1; 1; 0)$.

Vì $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương nhưng $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương với $\overline{M_1M_2} = (1; -1; 2)$ nên hai đường thẳng đó song song.

Vậy $d(d, d') = d(M_1, d') = \dfrac{\left|\left[\overline{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 2$.

b) Lấy điểm M ∈ d, M' ∈ d' thì: $M(-t; 4 + t; -1 - 2t)$, $M'(-t'; 2 + 3t'; -4 + 3t')$

Suy ra $\overline{MM}\,' = (-t' + t; -2 + 3t' - t; -3 + 3t' + 2t)$

MM' là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d, d' khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\overline{MM}'.\vec{u}=0\\ \overline{MM}'.\vec{u}\,'=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'-t-2+3t'-t+6-6t'-4t=0\\ t'-t-6+9t'-3t-9+9t'+6t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'+3t=2\\ 19t'+2t=15\end{cases}$$

Từ đó ta có: $t' = \dfrac{41}{55}$ $t = \dfrac{23}{55} \Rightarrow \overline{MM}' = \left(\dfrac{-18}{55}; \dfrac{-10}{55}; \dfrac{4}{55}\right)$

Vậy d(d, d') = MM' = $\dfrac{2\sqrt{110}}{55}$

**Ví dụ 10:** Tìm khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau đây:

a) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ d': $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -2 + t' \\ z = t' \end{cases}$

b) d: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ d': $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{3}$

**Giải**

a) d qua A(1; –1; 1) và có VTCP $\vec{u} = (1; -1; 0)$

d' qua B(2; –2; 0) và có VTCP $\vec{u}\,' = (-1; 1; 1)$

Ta có $\vec{u}$ và $\vec{u}$ không cùng phương và đặc biệt A thuộc d' nên 2 đường thẳng cắt nhau tại A. Vậy d(d; d') = 0.

b) d qua M(0; 4; –1) có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -2)$

d' qua M'(0; 2; 0) có VTCP $u' = (-1; 3; 3)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{u}\,'] = (9; 5; -2)$, $\overline{MM}' = (0; -2; 1)$

Do đó $d(d, d') = \dfrac{\left|[\vec{u}, \vec{u}\,'].\overline{MM}'\right|}{\left|[\vec{u}, \vec{u}\,']\right|} = \dfrac{|-10-2.1|}{\sqrt{81+25+4}} = \dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

**Ví dụ 11:** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(5; 5; 0) và đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-7}{-4}$ Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc d sao cho tam giác ABC vuông tại C và BC = $\sqrt{29}$

**Giải**

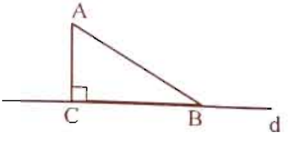
Vì C thuộc d và AC ⊥ d nên C là hình chiếu của A lên d.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; -4)$. Mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với d nhận $\vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$2(x-5) + 3(y-5) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 4z - 25 = 0.$$

Do đó C là giao điểm của d và (P) nên có toạ độ xác định bởi hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-7}{-4} \\ 2x + 3y - 4z - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$



Vậy C(3; 5; –1).

Ta có $B \in d$ nên $B(-1 + 2t; -1 + 3t; 7 - 4t)$

$BC = \sqrt{29} \Leftrightarrow (2t - 4)^2 + (3t - 6)^2 + (8 - 4t)^2 = 29$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$. Vậy $B(1; 2; 3)$ hoặc $B(5; 8; -5)$.

**Ví dụ 12:** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $A(1; 0; -1)$, $B(2; 3; -1)$, $C(1; 3; 1)$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình: $x - y + 1 = 0$, $x + y + z - 4 = 0$.

Tìm toạ độ điểm D thuộc đường thẳng d sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 1.

**Giải**

Ta có $\overline{AB} = (1; 3; 0)$, $\overline{AC} = (0; 3; 2)$

$u = [\overline{AB}, \overline{AC}] = (6; -2; 3)$.

Phương trình của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Vì $D \in d$ nên $D(t; 1 + t; 3 - 2t) \Rightarrow \overline{AD} = (t - 1; t + 1; -2t + 4)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overline{AB}, \overline{AC}].\overline{AD}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|6(t - 1) - 2(t + 1) + 3(-2t + 4)\right| = \frac{|2 - t|}{3}$$

Do đó $V_{ABCD} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2 - t|}{3} = 1 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 5$.

Vậy có hai điểm D thoả mãn bài toán là $D(-1; 0; 5)$ và $D(5; 6; -7)$

**Ví dụ 13**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$d_1$: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{1}$ và $d_2$ là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình: $5x - 6y - 6z + 13 = 0$, $x - 6y + 6z - 7 = 0$.

a) Chứng minh rằng $d_1$ và $d_2$ cắt nhau tại điểm I.

b) Tìm toạ độ các điểm A, B lần lượt thuộc $d_1$, $d_2$ sao cho tam giác IAB cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$

**Giải**

a) Toạ độ giao điểm I của $d_1$ và $d_2$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 3}{1} \\ 5x - 6y - 6z + 13 = 0 \\ x - 6y + 6z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$ Vậy $I(1; 1; 2)$

b) Vectơ chỉ phương của $d_1$ là $\vec{u}_1 = (2; 2; 1)$

Vectơ chỉ phương của $d_2$ là $\vec{u}_2 = [\vec{n}, \vec{n}'] = (-72; -36; -24)$ hay $(6; 3; 2)$.

ABC

Gọi φ là góc giữa $d_1$ và $d_2$ ta có: $\cos\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{20}{21} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{41}}{21}$

Ta có $S_{IAB} = \dfrac{1}{2}IA^2\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{41}}{42}IA^2 = \dfrac{\sqrt{41}}{42} \Leftrightarrow IA = IB = 1.$

Vì A thuộc $d_1$ nên toạ độ của $A(1 + 2t; 1 + 2t; 2 + t)$

Do đó $IA = 3|t| = 1 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{3}$

Suy ra $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

Vì B thuộc $d_2$ nên toạ độ của $B(1 + 6k; 1 + 3k; 2 + 2k)$.

Do đó $IB = 7|k| = 1 \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{1}{7}$

Suy ra $B\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};\dfrac{16}{7}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$

Vậy có bốn cặp điểm A, B nêu trên thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 14**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1$: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+9}{6}$, $\Delta_2$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng $\Delta_1$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta_2$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

**Giải**

$\Delta_2$ qua $A(1; 3; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1 + t; t; -9 + 6t)$

$\overrightarrow{MA} = (2 - t; 3 - t; 8 - 6t)$, $[\overrightarrow{MA}, \vec{u}] = (8t - 14; 20 - 14t; t - 4)$

$\Rightarrow |[\overrightarrow{MA}, \vec{u}]| = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ A đến $\Delta_2$: $\dfrac{|[\overrightarrow{MA}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ M đến (P):

$$d(M, (P)) = \frac{|-1 + t - 2t + 12t - 18 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11t - 20|}{3}$$

Ta có $d(M, \Delta_2) = d(M, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \dfrac{|11t - 20|}{3}$

$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \dfrac{53}{35}$

Với $t = 1 \Rightarrow M(0; 1; -3)$, $t = \dfrac{53}{35} \Rightarrow M\left(\dfrac{18}{35};\dfrac{53}{35};\dfrac{3}{35}\right)$.

ABC

**Ví dụ 15:** Cho 2 đường thẳng:

d: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.  d': $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

Tìm A thuộc d, A' thuộc d' sao cho AA' vuông góc d, d'.

**Giải**

Điểm A thuộc d nên A(t; 1 – t; 1 + t) và A' thuộc d' nên A'(1 – t'; 1 + t'; t').

Đường thẳng d, d' có VTCP $\vec{u} = (1; -1; 1)$, $\vec{u}\,' = (-1; 1; 1)$

Ta có $\begin{cases} AA' \perp d \\ AA' \perp d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AA'}.\vec{u}\,' = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t - t' = 0 \\ t + 3t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{4} \\ t' = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy hai điểm $A\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$ và $A'\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

**Ví dụ 16**: Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \end{cases}$ trong đó a, b, c thay đổi sao cho $c^2 = a^2 + b^2 > 0$.

a) Chứng minh đường thẳng Δ đi qua một điểm cố định, góc giữa Δ và Oz là không đổi.

b) Tìm quỹ tích giao điểm của Δ và mp(Oxy).

**Giải**

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm cố định A(1; 1; 5).

Ta có $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và trục Oz.

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{k}\right)\right| = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\frac{c}{c\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\varphi = 45^\circ$ : không đổi.

b) Toạ độ giao điểm M(x; y; z) của đường thẳng Δ và mp(Oxy) thoả mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = at \\ y - 1 = bt \\ t = -\frac{5}{c} \\ z = 0 \end{cases}$

Từ đó suy ra toạ độ (x; y; z) của M thoả mãn điều kiện:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (a^2 + b^2)\left(\frac{5}{c}\right)^2 = 25 \text{ và } z = 0.$$

ABC

Vậy quỹ tích điểm M khi $\Delta$ thay đổi là đường tròn tâm I(1; 1; 0), bán kính R = 5 và nằm trong mặt phẳng (Oxy).

**Ví dụ 17**: Trong không gian toạ độ Oxyz, xét đường thẳng $\Delta_m$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)$: $mx + y - mz - 1 = 0$ và $(\alpha')$: $x - my + z - m = 0$.

a) Chứng minh góc giữa $\Delta_m$ và trục Oz không đổi.

b) Chứng minh khoảng cách giữa $\Delta_m$ và Oz không đổi.

c) Tìm tập hợp các giao điểm M của $\Delta_m$ và mp(Oxy) khi m thay đổi.

**Giải**

a) $\Delta_m$ là giao tuyến của hai mặt phẳng với các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (m; 1; -m)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1; -m; 1)$. Do đó $\Delta_m$ có vectơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{u_m} = [(\overrightarrow{n_1}\ \ \overrightarrow{n_2}] = (1 - m^2; -2m ; -1 - m^2)$$

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$.

Nếu gọi $\varphi_m$ là góc giữa hai đường thẳng $\Delta_m$ và Oz thì:

$$\cos\varphi_m = \frac{\left|\overrightarrow{u_m}.\overrightarrow{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u_m}\right|.\left|\overrightarrow{k}\right|} = \frac{1 + m^2}{\sqrt{(1 - m^2)^2 + 4m^2 + (1 + m^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suy ra $\varphi_m = 45^o$ : không đổi.

b) Điểm M(x; y; z) thuộc $\Delta_m$ khi toạ độ của M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0 \end{cases}$$

Khử z từ hệ phương trình, ta được phương trình:

$$2mx + (1 - m^2)y - 1 - m^2 = 0.$$

Đây là phương trình của mặt phẳng $(\alpha_m)$ chứa $\Delta_m$ và song song với trục Oz. Do đó, khoảng cách giữa $\Delta_m$ và Oz bằng khoảng cách từ gốc O(0; 0; 0) thuộc Oz tới mp$(\alpha_m)$.

Vậy khoảng cách đó bằng:

$$d_m = \frac{\left|-1 - m^2\right|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = \frac{1 + m^2}{\sqrt{m^4 + 2m^2 + 1}} = 1 : \text{không đổi.}$$

c) Toạ độ giao điểm M của $\Delta_m$ và mp(Oxy) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = m \\ z = 0 \end{cases}$$

Bình phương hai vế của hai phương trình đầu của hệ rồi cộng lại, ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 trong mặt phẳng toạ độ (Oxy).

**Ví dụ 18:**

a) Tìm tập hợp các điểm M cách đều ba điểm A(1; 1; 1), B(–1; 2; 0), C(2; –3; 2).

b) Tìm tập hợp các điểm M cách đều hai trục toạ độ Ox, Oy và điểm A(1; 1; 0).

**Giải**

a) Điểm M(x; y; z) cách đều ba điểm A, B, C khi và chỉ khi:

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 2x - 8y + 2z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - 4y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Tập hợp điểm M(x; y; z) là đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng trên. Đặt y = t thì x = –8 – 3t và z = 15 + 7t.

Vậy tập hợp là trục của tam giác ABC có phương trình là: $\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$

b) Xét điểm M(x; y; z). Khi đó khoảng cách từ M tới trục Ox và Oy là:

$$d_x = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{i}\right]\right|}{\left|\vec{i}\right|} = \sqrt{y^2 + z^2}; \quad d_y = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{j}\right]\right|}{\left|\vec{j}\right|} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Và $MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$ Ta có $d_x = d_y = MA$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + z^2 \\ y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+y) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 - 2(x+y) + 2 = 0 \end{cases}$$

Khi x = y, $x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Trong trường hợp này, tập hợp các điểm M là những điểm (x; y; z) thuộc

2 đường thẳng: $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 + \sqrt{2} \\ z = t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \\ z = t \end{cases}$

Khi x = –y, $x^2 + 2 = 0$. Điều này không xảy ra.

**Ví dụ 19**: Cho đường thẳng $d_1$ đi qua điểm $M_1(0; 0; 1)$ song song với Oy và đường thẳng $d_2$ đi qua điểm $M_2(0; 0; -1)$ song song với Ox.

Tìm tập hợp các điểm M nằm trong mỗi mặt phẳng toạ độ và cách đều $d_1$, $d_2$.

**Giải**

M(x; y; z) cách đều $d_1$ và $d_2$ khi và chỉ khi:

ABC

$$d(M, d_1) = d(M, d_2) \Leftrightarrow \sqrt{(z-1)^2 + x^2} = \sqrt{(z+1)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2z = y^2 + 2z \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4z.$$

Xét $M \in mp(Oxy)$, khi đó $z = 0$ suy ra $x^2 - y^2 = 0$.

Vậy quỹ tích điểm M là cặp đường thẳng $y = \pm x$ nằm trong mặt phẳng $z = 0$.

Xét $M \in mp(Oyz)$, khi đó là $x = 0$. Quỹ tích điểm M là đường parabol $y^2 = -4z$ nằm trong mặt phẳng $x = 0$.

Xét $M \in mp(Oxz)$, khi đó $y = 0$. Quỹ tích điểm M là đường parabol $x^2 = 4z$ nằm trong mặt phẳng $y = 0$.

**Ví dụ 20**: Cho hai điểm $A(3; 1; 1)$; $B(7; 3; 9)$ và $mp(\alpha)$: $x + y + z + 3 = 0$.

Tìm điểm M trên $(\alpha)$ để $\left|\overline{MA} + \overline{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Giải**

Gọi I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I(5; 2; 5)$

Ta có $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI} \Rightarrow \left|\overline{MA} + \overline{MB}\right| = 2MI$.

Vậy $\left|\overline{MA} + \overline{MB}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên $mp(\alpha)$.

Toạ độ của $M(x; y; z)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -5 \Rightarrow M(0; -3; 0).$$

**Ví dụ 21:** Cho hai điểm $A(3; 1; 0)$, $B(-9; 4; 9)$ và $mp(\alpha)$: $2x - y + z + 1 = 0$.

Tìm toạ độ điểm M trên $(\alpha)$ sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

**Giải**

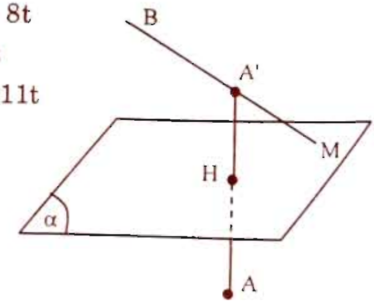
Đặt $f(x; y; z) = 2x - y + z + 1$ thì $f(x_A; y_A; z_A).f(x_B; y_B; z_B) < 0$ nên hai điểm A, B ở khác phía đối với mặt phẳng $(\alpha)$.

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng $(\alpha)$,

Ta có: $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ (Không đổi).

A'H: $x = 3 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = t$ nên $H(3 + 2t; 1 - t; t)$ thuộc $(\alpha)$ suy ra $t = -1$ $\Rightarrow H(1; 2; -1)$. Do đó $A'(-1; 3; -2)$.

Đường thẳng A'B có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \end{cases}$



Toạ độ điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(7; 2; -13).$$

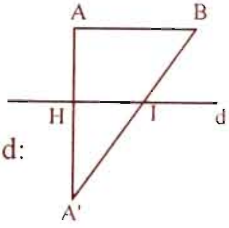
ABC

**Ví dụ 22**: Cho hai điểm A(1; 2; −1), B(7; −2; 3) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$

a) Chứng tỏ rằng đường thẳng d và đường thẳng AB cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Tìm điểm I thuộc d sao cho IA + IB nhỏ nhất.

**Giải**



a) d có VTCP $\vec{u} = (3; -2; 2)$ và đi qua M(−1; 2; 2).

Ta có $\overline{AB} = (6; -4; 4) = 2\vec{u}$ và M không thuộc d nên đường thẳng AB song song với d.

b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d:

(P): $3(x - 1) - 2(y - 2) + 2(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Điểm H thuộc d nên $H(-1 + 3t; 2 - 2t; 2 + 2t)$ và thuộc (P) nên $t = 0 \Rightarrow H(-1; 2; 2)$.

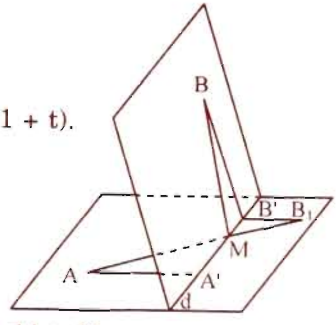
Do đó điểm đối xứng A qua d là A'(−3; 2; 5).

Ta có IA + IB = IA' + IB ≥ A'B: không đổi.

Do đó IA + IB bé nhất khi I = A'B ∩ d mà AB song song d nên I chính là trung điểm A'B. Vậy I(2; 0; 4).

**Ví dụ 23:** Cho A(2; −2; 1), B(0; 2; −3). Tìm điểm M thuộc d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ sao cho MA + MB bé nhất.

**Giải**



Ta tìm hình chiếu A', B' của A, B lên d.

Ta có M bất kỳ thuộc d thì M(1 + 2t; 2 − t; 1 + t).

$$\begin{aligned} AM^2 &= (2t - 1)^2 + (4 - t)^2 + t^2 \\ &= 6t^2 - 12t + 17 \\ &= 6(t - 1)^2 + 11 \geq 11 \end{aligned}$$

AM bé nhất khi t = 1, khi đó M là hình chiếu A'(3; 1; 2)

Tương tự $BM^2 = 6t^2 + 12t + 17 = 6(t + 1)^2 + 11 \geq 11$.

BM bé nhất khi t = 1, khi đó M là hình chiếu B'(−1; 3; 0).

Trên mp(A, d) lấy điểm $B_1$ sao cho $B_1$ và A khác phía đối với d, $B_1B' \perp d$, $B_1B' = BB'$.

Với mọi M thuộc d: $MA + MB = MA + MB_1 \geq AB_1$: không đổi, do đó MA + MB bé nhất khi M là giao điểm của $AB_1$ với d .

Ta có AA' // $B_1B'$ nên M chia đoạn A'B' theo tỉ:

$$k = -\frac{AA}{B_1B'} = -\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = -1 \Rightarrow M(1; 2; 1).$$

ABC

**Ví dụ 24**: Cho ba điểm A(2; 0; 1), B(2; −1; 0), C(1; 0; 1). Tìm trên đường thẳng (d): $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ điểm S sao cho $\left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Giải**

Tam giác ABC có trọng tâm $G(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Ta có:

$T = \left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right| = \left|3\overrightarrow{SG}\right| = 3SG$. Do đó T bé nhất khi S là hình chiếu vuông góc của G lên d.

Mặt phẳng (P) qua G, vuông góc d: $x + 2y + 3z - 3 = 0$.

S(t, 2t, 3t) thuộc (P) nên $t = \frac{3}{14}$ Vậy $S\left(\frac{3}{14}; \frac{3}{7}; \frac{9}{14}\right)$.

**Ví dụ 25**: Cho A(1; 4; 5), B(0; 3; 1); C(2; −1; 0) và mặt phẳng (P): $3x - 3y - 2z - 15 = 0$.

Tìm điểm M thuộc (P) để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất.

**Giải**

Tam giác ABC có trọng tâm G(1; 2; 2). Ta có:

$$\begin{aligned} T &= MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Do đó T bé nhất khi M là hình chiếu của G lên mp(P).

Đường thẳng d qua G, vuông góc (P) có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

Thế x, y, z vào (P) thì t = 1. Vậy M(4; −1; 0).

**Ví dụ 26:** Cho điểm A(2; 1; 4), tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ để AM bé nhất.

**Giải**

Vì M thuộc Δ nên AM bé nhất khi M là hình chiếu của A lên Δ. Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 2)$, M(1 + t ; 2 + t; 1 + 2t). Ta có $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ $\Leftrightarrow t = 1$. Vậy M(2; 3; 3).

**Ví dụ 27**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho đường thẳng $d_1$ đi qua các điểm A(5; 4; 3), B(6; 7; 2) và đường thẳng $d_2$: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$

Tìm điểm C thuộc $d_2$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

### Giải

Đường thẳng $d_1$ qua A và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -1)$

Đường thẳng $d_2$ qua M(1; 2; 3) và có VTCP $\vec{u} = (2; 3; 1)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}\sqrt{11}.d(AB, d_2).$$

Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$ ($I \in d_2$, $J \in d_1$).

Ta có: $I(1 + 2t; 2 + 3t; 3 + t)$, $J(5 + s; 4 + 3s; 3 - s)$.

$$\overrightarrow{IJ} = (4 - 2t + s; 2 - 3t + 3s; -t - s)$$

IJ là đoạn vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$ nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{IJ}.\vec{u} = 0\\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(4 - 2t + s) + 3(2 - 3t + 3s) + (-t - s) = 0\\ (4 - 2t + s) + 3(2 - 3t + 3s) - (-t - s) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 1\\ s = 0\end{cases}$$

Do đó $I(3; 5; 4)$, $J \equiv A(5; 4; 3)$ ; $IJ = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$$S_{ABC} \geq \frac{1}{2}AB.IJ = \frac{1}{2}\sqrt{11}.\sqrt{6} = \frac{\sqrt{66}}{2}.$$ Dấu = khi $C \equiv I(3; 5; 4)$.

**Ví dụ 28:** Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Biết $A(a; 0; 0)$, $B(-a; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(-a; 0; b)$, $a > 0$, $b > 0$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B_1C$ và $AC_1$ theo a, b.

b) Cho a, b thay đổi mà a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng $B_1C$ và $AC_1$ lớn nhất.

### Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = (0; 0; b)$

nên $C_1(0; 1; b)$ , $\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b)$, $\overrightarrow{AC_1} = (-a; 1; b)$, $\overrightarrow{AB_1} = (-2a; 0; b)$

và $[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}] = (2b; 0; 2a)$

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{\left|[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}].\overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}]\right|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$d(B_1C; AC_1) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a + b}{2} = \sqrt{2}$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi a = b = 2. Vậy khoảng cách giữa $B_1C$ và $AC_1$ lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi a = b = 2.

**Ví dụ 29:** Trong không gian Oxyz, cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc O. Biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

### Giải

a) $C(-2; 0; 0)$, $D(0; -1; 0)$, $M(-1; 0; \sqrt{2})$

ABC

$\overline{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$, $\overline{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$

$$\cos(SA, BM) = \left|\cos(\overline{SA}, \overline{BM})\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (SA, BM) = 30^0$$

Ta có: $[\overline{SA}.\overline{BM}] = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$, $\overline{AB} = (-2; 1; 0)$

nên $d(SA, BM) = \dfrac{\left|\left[\overline{SA}, \overline{BM}\right].\overline{AB}\right|}{\left|\left[\overline{SA}, \overline{BM}\right]\right|} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

b) MN // AB, CD nên N trung điểm SD, $N(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2})$

$\overline{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2})$, $\overline{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2})$, $\overline{SN} = (0; -\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$

và $[\overline{SA}, \overline{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0)$. Ta có:

$V_{S.ABM} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overline{SA}, \overline{SM}\right].\ \overline{SB}\right| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overline{SA}, \overline{SM}\right].\ \overline{SN}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Vậy: $S_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$.

**Ví dụ 30:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với AB = a, BC = b, CC' = c.

a) Tính khoảng cách từ điểm A tới mp(A'BD).

b) Tính khoảng cách từ điểm A' tới đường thẳng C'D.

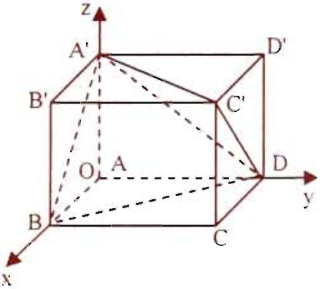
c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'

## Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; b; 0), A'(0; 0; c).

Ta có C(a; b; 0), D'(0; b; c),

B'(a; 0; c), C'(a; b; c).



a) Phương trình mp(A'BD) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \text{ nên}$$

$$d(A, (A'BD)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

b) $\overline{A'C'} = (a; b; 0)$, $\overline{C'D} = (-a; 0; -c)$, $[\overline{A'C'}, \overline{C'D}] = (-bc; ac; ab)$

$$d(A', C'D) = \frac{\left|[\overline{A'C'}, \overline{C'D}]\right|}{\left|\overline{C'D}\right|} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

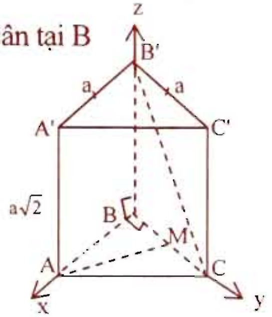
c) Ta có $\overline{BC'} = (0, b, c)$, $\overline{CD'} = (-a; 0; c)$, $\overline{BC} = (0; b; 0)$

$$d(BC', CD') = \frac{\left|\left[\overline{BC'}, \overline{CD'}\right].\overline{BC}\right|}{\left|\left[\overline{BC'}, \overline{CD'}\right]\right|} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

ABC

**Ví dụ 31:** Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa AM, B'C.

**Giải**



Chọn hệ trục toạ độ Bxyz như hình vẽ ΔABC vuông cân tại B

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow$ AA'C'C là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$.

$B(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$,

$B'(0; 0; a\sqrt{2})$, $A'(a; 0; a\sqrt{2})$, $C'(0; a; a\sqrt{2})$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (a; 0; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; a; 0)$,

$\overrightarrow{BB'} = (0; 0; a\sqrt{2})$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = (0. 0; a^2)$

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BB'}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 \text{ (đvtt)}$$

Ta có : $M(0; \frac{a}{2}; 0)$, $\overrightarrow{AM} = (-a; \frac{a}{2}; 0)$

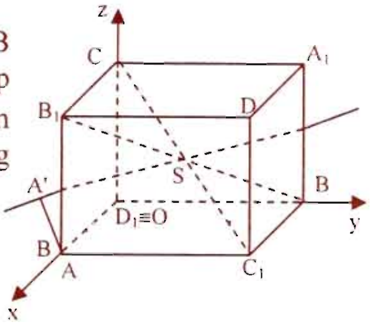
$\overrightarrow{B'C} = (0; a; -a\sqrt{2})$ ; $\overrightarrow{AB'} = (-a; 0; a\sqrt{2})$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] = \left(-a^2\frac{\sqrt{2}}{2};\ -a^2\sqrt{2};\ -a^2\right)$$

Nên $$d(AM, B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{\left|a^3\frac{\sqrt{2}}{2} - a^3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{\frac{a^4}{2} + 2a^4 + a^4}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

**Ví dụ 32:** Tứ diện đều ABCD có tâm là S và độ dài các cạnh bằng 2. Một đường thẳng Δ quay quanh S. Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D trên Δ. Tìm tất cả các vị trí của Δ sao cho tổng $SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4$ đạt giá trị lớn nhất.

**Giải**



Dựng hình lập phương $AB_1CD_1.C_1DA_1B$ ngoại tiếp tứ diện đều ABCD, hình lập phương này có độ dài cạnh bằng $\sqrt{2}$ Chọn $D_1$ làm gốc O của hệ trục toạ độ Đề các vuông góc Oxyz sao cho$A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$.

Ta có $A(\sqrt{2}; 0; 0)$, $B(0; \sqrt{2}; 0)$,

$C(0; 0; \sqrt{2})$, $D(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$,

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ABC

Suy ra: $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Gọi $\vec{e}=(x;y;z)$ là vectơ đơn vị chỉ phương của đường thẳng $\Delta$, thì:

$SA'=\left|\vec{e}\,\overrightarrow{SA}\right|$ $SB'=\left|\vec{e}\,\overrightarrow{SB}\right|$, $SC'=\left|\vec{e}\,\overrightarrow{SC}\right|$

$SD'=\left|\vec{e}\,\overrightarrow{SD}\right|$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Ta có:

$$S=SA'^4+SB'^4+SC'^4+SD'^4$$

$$=\frac{1}{4}[(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)^4]$$

$$=1+4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\le 1+\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{7}{3}$$

Vậy $S_{\max}=\frac{7}{3}\Leftrightarrow x^2=y^2=z^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|=|y|=|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Suy ra 4 vị trí của $\Delta$ thoả mãn điều kiện tổng và đạt GTLN, tương ứng với vectơ đơn vị chỉ phương là: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Đó là 4 đường thẳng SA, SB, SC, SD đi qua các đỉnh của tứ diện đều.

## DẠNG 5: TOÁN TỔNG HỢP

Ngoài việc giải bài toán tọa độ không gian, ngoài ra ta có thể đưa bài toán không có toạ độ trở thành bài toán toạ độ không gian bằng cách chọn hệ toạ độ Oxyz thích hợp:

**Sử dụng độ dài hoặc khoảng cách**

– Với 3 điểm A, B, C tuỳ ý thì: $AB+BC\ge AC$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó.

– Với 3 điểm A, B, C tuỳ ý thì: $|AB-AC|\le BC$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi 3 điểm A, B, C thẳng hàng và điểm A nằm ngoài đoạn BC.

**Sử dụng tổng, hiệu các vectơ hoặc tích vô hướng**

– Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ tuỳ ý thì: $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

– Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ tuỳ ý thì: $|\vec{u}-\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ngược hướng.

– Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ tuỳ ý thì: $|\vec{u}.\vec{v}|\le|\vec{u}|.|\vec{v}|$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

### Sử dụng đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu và vị trí tương đối

– Với đẳng thức $ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ thì các điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn đẳng thức đều thuộc mặt phẳng (P):
$ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

– Với đẳng thức kép: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ ( $a, b, c \neq 0$) thì các điểm $M(x;y;z)$ thoả mãn đẳng thức kép đều thuộc đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

– Với đẳng thức $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k$, nếu $k > 0$ thì các điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn đẳng thức đều thuộc mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{k}$ : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k$

– Với đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$,
nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì các điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn đẳng thức đều thuộc mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ và bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

### Sử dụng công thức góc, khoảng cách, diện tích, thể tích

Chuyển cách tính về cách tính theo không gian toạ độ.

**Ví dụ 1:** Cho hai điểm $A(1; -1; -2)$, $B(3; 1; 1)$ và mặt phẳng
(P): $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(P).

b) Tìm góc giữa đường thẳng AB và mp(P).

c) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mp(P).

d) Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB và mp(P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua I và vuông góc với AB.

**Giải**

a) Gọi $A'(x_o; y_o; z_o)$ thì trung điểm của AA' là: $I\left(\frac{x_o + 1}{2}; \frac{y_o - 1}{2}; \frac{z_o - 2}{2}\right)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'} \perp (P)\\ I \in (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x_o - 1}{1} = \frac{y_o + 1}{-2} = \frac{z_o + 2}{3}\\ \frac{x_o + 1}{2} - 2\left(\frac{y_o - 1}{2}\right) + 3\left(\frac{z_o - 2}{2}\right) - 5 = 0\end{cases}$

Từ đó ta tìm được toạ độ của $A'\left(\frac{15}{7}; -\frac{23}{7}; \frac{10}{7}\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 3)$ và mp(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1; -2; 3)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mp(P), ta có:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{|2 - 4 + 9|}{\sqrt{17}\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{238}}$$

ABC

c) Mặt phẳng(Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}] = (12; -3; -6)$ hay $(4; -1; -2)$

Vậy phương trình của mp(Q) là:

$$4(x - 1) - (y + 1) - 2(z + 2) = 0 \text{ hay } 4x - y - 2z - 9 = 0.$$

d) I thuộc AB nên $I(1 + 2t; -1 + 2t; -2 + 3t)$

Thế vào (P) thì $t = \frac{8}{7}$ nên giao điểm $I\left(\frac{23}{7}; \frac{9}{7}; \frac{10}{7}\right)$

Đường thẳng Δ chính là giao tuyến của mp(P) và mp(R), trong đó (R) đi qua I và vuông góc với AB.

Vì $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 3)$ nên phương trình của mp(R) là:

$$2\left(x - \frac{23}{7}\right) + 2\left(y - \frac{9}{7}\right) + 3\left(z - \frac{10}{7}\right) = 0 \text{ hay } 14x + 14y + 21z - 94 = 0$$

Suy ra Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = \frac{23}{7} + 4t \\ y = \frac{9}{7} - t \\ z = \frac{10}{7} - 2t \end{cases}$

**Ví dụ 2**: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình:

(P): $2x - y + z + 2 = 0$ và (Q): $x + y + 2z - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng (P) và (Q) cắt nhau. Tìm góc giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; 2; -3)$ và song song với cả (P) và (Q).

c) Viết phương trình mp(R) đi qua $B(-1; 3; 4)$ vuông góc với cả (P) và (Q).

**Giải**

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P} = (2; -1; 1)$ và $\overrightarrow{n_Q} = (1; 1; 2)$. Vì hai vectơ đó không cùng phương nên (P) và (Q) cắt nhau. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó là:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|} = \frac{|2 - 1 + 2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

b) Đường thẳng d song song với cả (P) và (Q) nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\overrightarrow{n_P}\ \ \overrightarrow{n_Q}] = (-3; -3; 3)$ hay $(1; 1; -1)$, vì A không thuộc 2 mặt phẳng (P), (Q) nên đường thẳng d cần tìm có phương trình $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 3}{-1}$

c) Mp(R) đi qua $B(-1; 3; 4)$ và vuông góc với d nên có vectơ pháp tuyến $\vec{u}$ nên (R) có phương trình:

$$x + 1 + y - 3 - (z - 4) = 0 \text{ hay } x + y - z + 2 = 0.$$

**Ví dụ 3**: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho các điểm $A(4; -1; 2)$, $B(1; 2; 2)$ và $C(1; -1; 5)$.

a) Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

b) Viết phương trình mp(ABC). Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mp(ABC) và các mặt phẳng toạ độ.

c) Viết phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d) Tìm toạ độ điểm D sao cho ABCD là tứ diện đều.

**Giải**

a) Ta có $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (2+1)^2 + (2-2)^2} = 3\sqrt{2}$

Tương tự $BC = CA = 3\sqrt{2}$.

Suy ra $AB = BC = CA$ và do đó, ABC là tam giác đều.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 3)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (9, 9, 9)$

Mp(ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và đi qua điểm $A(4; -1; 2)$ nên có phương trình: $x - 4 + y + 1 + z - 2 = 0$ hay $x + y + z - 5 = 0$.

Mặt phẳng (ABC) cắt trục toạ độ tại các điểm $M(5; 0; 0)$, $N(0; 5; 0)$ và $P(0; 0; 5)$. Vậy mặt phẳng đó và các mặt phẳng toạ độ tạo thành tứ diện OMNP có thể tích là:

$$V = \frac{1}{6}OM.ON.OP = \frac{5.5.5}{6} = \frac{125}{6}$$

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là trọng tâm của tam giác $G(2; 0; 3)$. Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường thẳng đi qua G, có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (1; 1; 1)$ nên có phương trình:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$$

d) ABCD là tứ diện đều khi và chỉ khi D nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $DA = AB = 3\sqrt{2}$.

Do đó $D(2 + t; t; 3 + t)$ và $DA^2 = 18$

$\Leftrightarrow (2 + t - 4)^2 + (t + 1)^2 + (3 + t - 2)^2 = 18 \Leftrightarrow t = \pm 2$.

Vậy có 2 điểm $D_1(4; 2; 5)$ và $D_2(0; -2; 1)$.

**Ví dụ 4**: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho bốn điểm $A(3; 1; 2)$, $B(-1; -3; 0)$, $C(4; 0; -3)$ và $D(2; 2; -1)$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

b) Tìm toạ độ của H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD).

c) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua B và vuông góc với đường thẳng CD.

d) Tìm toạ độ của K là trực tâm của tam giác BCD.

**Giải**

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (5; 3; -3)$, $\overrightarrow{BD} = (3; 5; -1)$. Mp(BCD) có VTPT:

$\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (12; -4; 16)$ hay $(3; -1; 4)$

Phương trình mp(BCD): $3x - y + 4z = 0$ nên:

$$d(A;(BCD)) = \frac{|9-1+8|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{16}{\sqrt{26}}$$

b) Đường thẳng AH đi qua A(3; 1; 2) vuông góc với mp(BCD) nên có vectơ chỉ phương là (3; –1; 4) nên phương trình tham số của AH là: $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$

$\Rightarrow H(3 + 3t;\ 1 - t;\ 2 + 4t)$.

Thế vào mp(BCD) thì $t = -\dfrac{8}{13}$ nên $H\left(\dfrac{15}{13}; \dfrac{21}{13}; \dfrac{-6}{13}\right)$.

c) Mặt phẳng (P) đi qua B(–1; –3; 0) và vuông góc với CD nên có vectơ pháp tuyến là $\overline{CD} = (-2; 2; 2)$ nên phương trình mp(P) là:
$-2(x + 1) + 2(y + 3) + 2z = 0$ hay $x - y - z - 2 = 0$.

d) Trực tâm K của tam giác BCD là giao điểm của các đường cao của tam giác BCD nên cũng chính là giao điểm của ba mặt phẳng: mp(BCD), mp(P), mp(Q) với (Q) là mặt phẳng đi qua C vuông góc với BD. Mp(Q): $3x + 5y - z - 15 = 0$.
Giải hệ ba phương trình mặt phẳng (BCD), (P), (Q) ta được trực tâm: $K\left(\dfrac{113}{52}; \dfrac{75}{52}; \dfrac{-33}{26}\right)$.

**Ví dụ 5:** Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) lần lượt có phương trình:

$\Delta: \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ (α): $3x + 5y - z - 2 = 0$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α) và hãy tìm toạ độ giao điểm của chúng.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α') qua điểm $M_o(1; 2; -1)$ và vuông góc với Δ.

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của Δ trên mặt phẳng (α).

d) Cho điểm A(1; 0; –1). Hãy tìm toạ độ điểm A' sao cho mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AA'.

e) Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc chứa điểm $M_1(1; 2; 1)$ tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (α').

**Giải**

a) Đường thẳng Δ qua điểm $M_o(12; 9; 1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; 1)$.
Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5; -1)$.
Ta có: $\vec{u}.\vec{n} = 4.3 + 3.5 + 1(-1) = 26 \neq 0$. Vậy Δ cắt (α).
Toạ độ giao điểm của Δ và (α) là I(0; 0; –2)

b) Phương trình của mặt phẳng (α') là:
$$4(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + z - 9 = 0.$$

c) Phương trình mặt phẳng (β) chứa Δ và vuông góc với (α) là:
$$8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

Do đó hình chiếu Δ' là giao tuyến của 2 mặt phẳng

$$3x + 5y - z - 2 = 0 \text{ và } 8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

Suy ra phương trình hình chiếu vuông góc của Δ trên (α):

Đặt z = t thì $\begin{cases} x = \dfrac{124}{61} + \dfrac{62}{61}t \\ y = -\dfrac{50}{61} - \dfrac{25}{61}t \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = \dfrac{124}{61} + \dfrac{62}{61}t \\ y = -\dfrac{50}{61} - \dfrac{25}{61}t \\ z = t \end{cases}$

d) Mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA' khi và chỉ khi điểm A' là điểm đối xứng với A qua (α).

Phương trình đường thẳng AA' là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Tham số t ứng với giao điểm H của AA' và (α) là nghiệm của phương trình: $3(1 + 3t) + 5(5t) - (-1 - t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 35t = -2.$

$\Rightarrow t = -\dfrac{2}{35} \Rightarrow H\left(\dfrac{29}{35}; -\dfrac{2}{7}; -\dfrac{33}{35}\right)$

H là trung điểm của AA' nên $A\left(\dfrac{23}{35}; -\dfrac{4}{7}; -\dfrac{31}{35}\right)$.

e) Thay toạ độ điểm $M_1(1; 2; 1)$ vào vế trái phương trình của (α) ta có:

$$3.1 + 5.2 - 1.1 - 2 = 10 > 0$$

Thay toạ độ điểm $M_1(1; 2; 1)$ vào vế trái phương trình của (α') ta có:

$$4.1 + 3.2 + 1.1 - 9 = 2 > 0$$

Vậy điểm M(x; y; z) thuộc mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (α') chứa điểm $M_1$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (4x + 3y + z - 9)(3x + 5y - z - 2) > 0 \\ \dfrac{|4x + 3y + z - 9|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} = \dfrac{|3x + 5y - z - 2|}{\sqrt{9 + 25 + 1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (4\sqrt{35} - 3\sqrt{26})x + (3\sqrt{35} - 5\sqrt{26})y + (\sqrt{35} + \sqrt{26})z - 9\sqrt{35} + 2\sqrt{26} = 0.$$

**Ví dụ 6**: Cho hai đường thẳng: d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 6}{3}$ và d': $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

a) Chứng minh hai đường thẳng đó chéo nhau. Tính góc giữa chúng.

b) Tính khoảng cách giữa d và d'.

c) Viết phương trình đường vuông góc của d và d'.

d) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả d và d'.

**Giải**

d đi qua $M_o(0; 1; 6)$ và có vectơ chỉ phương $u = (1; 2; 3)$

ABC

d' đi qua $M'_0(1; -2; 3)$ và có vectơ phương $\vec{u}' = (1; 1; -1)$.

a) Ta có $\overrightarrow{M_0M'_0} = (1; -3; -3)$, $[\vec{u}, \vec{u}'] = (-5; 4; -1)$ do đó

$$[\vec{u}, u'] . \overrightarrow{M_0M'_0} = -14 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Vì $\vec{u} . \vec{u}' = 0$ nên $d \perp d' \Rightarrow \varphi = 90^\circ$

b) Khoảng cách giữa d và d' là:

$$d(d, d') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right] . \overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right]\right|} = \frac{14}{\sqrt{25 + 16 + 1}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

c) Đường vuông góc chung Δ của d và d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = [\vec{u}, \vec{u}'] = (-5; 4; -1)$. Ta viết phương trình của mp(Δ, d) và mp(Δ, d'), giao của hai mặt phẳng đó chính là Δ. Vectơ pháp tuyến của mp(Δ, d) là $[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}] = (14; 14; -14)$ hay $(1; 1; -1)$.

Do đó phương trình của mp(Δ, d) qua $M_0(0; 1; 6)$:

$$(x - 0) + (y - 1) - (z - 6) = 0 \text{ hay } x + y - z + 5 = 0.$$

Vectơ pháp tuyến của mp(Δ, d') là $[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}'] = (-3; -6; -9)$ hay$(1; 2; 3)$.

Do đó phương trình của mp(Δ, d') qua $M_0'(1; -2; 3)$:

$$x - 1 + 2(y + 2) + 3(z - 3) = 0 \text{ hay } x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Suy ra phương trình tham số của đường vuông góc chung:

Đặt $z = t$ thì $\begin{cases} x = -16 + 5t \\ y = 11 - 4t \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = -16 + 5t \\ y = 11 - 4t \\ z = t \end{cases}$

d) Giả sử đường thẳng Δ song song với Oz, cắt d và d' lần lượt tại A và B

Ta có $A(t; 1 + 2t; 6 + 3t)$, $B(1 + t'; -2 + t'; 3 - t')$

Nên $\overrightarrow{AB} = (1 + t' - t; -3 + t' - 2t; -3 - t' - 3t)$.

Vì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên $1 + t' - t = -3 + t' - 2t = 0$, suy ra $t = -4$ và $t' = -5$.

Vậy $A(-4; -7; -6)$ và $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 14)$ nên Δ: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \\ z = -6 + t \end{cases}$

**Ví dụ 7:** Cho hai đường thẳng: $d_1$: $\begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$ và $d_2$: $\dfrac{3 - x}{7} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 1}{3}$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ O song song với cả $d_1$ và $d_2$.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

**Giải**

a) $d_1$ đi qua điểm $M_1(8; 5; 8)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; 2; -1)$

$d_2$ đi qua điểm $M_2(3; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-7; 2; 3)$

Ta có $\overrightarrow{M_2M_1} = (5; 4; 7)$, $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (8; 4; 16)$, do đó:

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_2M_1} = 168 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ chéo nhau.

b) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (8; 4; 16) \text{ hay } (2; 1; 4).$$

Mp(P) qua O có phương trình là $2x + y + 4z = 0$. Ta có $M_1$, $M_2$ không thuộc mặt phẳng này, vậy nó chính là mặt phẳng cần tìm.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ là:

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = 2\sqrt{21}.$$

d) Giả sử PQ là đường vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$ với

$P \in d_1$; $Q \in d_2$: $P(8 + t; 5 + 2t; 8 - t)$, $Q(3 - 7t'; 1 + 2t'; 1 + 3t')$

Ta có $\overrightarrow{PQ} = (-5 - 7t' - t; -4 + 2t' - 2t; -7 + 3t' + t)$ nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t' - 6t = 6 \\ 62t' + 6t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Do đó $P(7; 3; 9)$, $Q(3; 1; 1)$. Vậy đường vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$ có phương trình: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{4}$

**Ví dụ 8:** Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

a) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng toạ độ.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng $x + 5y + z + 4 = 0$ đi qua đường thẳng Δ.

c) Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và các trục toạ độ.

d) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả Δ và Δ'.

**Giải**

a) Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3t \end{cases}$.

Vì mỗi điểm $M(x; y; z)$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là $M'(x; y; 0)$ nên hình chiếu $d_1$ của Δ trên mp(Oxy) có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$.

ABC

Hình chiếu $d_2$ của Δ trên mp(Oyz) là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 3t \end{cases}$

Hình chiếu $d_3$ của Δ trên mp(Oxz) là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$

b) Mặt phẳng (α) đã cho có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 5; 1)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$

Ta có $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên Δ song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α).

Vì điểm M(1; –1; 0) của Δ thuộc (α) nên Δ nằm trên (α).

c) Khoảng cách giữa Oz và Δ bằng khoảng cách từ O tới đường thẳng $d_1$. Xét trong mặt phẳng toạ độ Oxy thì O(0; 0) còn đường thẳng $d_1$ có phương trình: $x + 2y + 1 = 0$.

Vậy ta có: $d(Oz, \Delta) = d(O; d_1) = \dfrac{|1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Tương tự: $d(Ox; \Delta) = d(O; d_2) = \dfrac{|3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$d(Oy; \Delta) = d(O; d_3) = \dfrac{|-3|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

d) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hình chiếu $d_1$ của đường thẳng Δ có phương trình: $x + 2y + 1 = 0$ và hình chiếu $d'_1$ của Δ' có phương trình $x - y = 0$.

Giao điểm của hai đường thẳng $d_1$ và $d'_1$ là $I(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0)$

Khi đó đường thẳng đi qua I, song song với Oz sẽ cắt cả hai đường thẳng Δ và Δ'. Phương trình đường thẳng đó là: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$

**Ví dụ 9:** Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) có phương trình:

d: $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y + 1}{3} = \dfrac{z - 1}{5}$, (α): $2x + y + z - 8 = 0$.

a) Tìm góc giữa d và (α).

b) Tìm toạ độ giao điểm A của d và (α).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (α).

## Giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 5)$, mặt phẳng $(\alpha)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 1)$

Gọi $\varphi$ là góc giữa d và $(\alpha)$ thì $0^o \le \varphi \le 90^o$ và

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|4 + 3 + 5|}{\sqrt{4 + 9 + 25}.\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{57}}$$

b) Giao điểm A thuộc d nên $A(2 + 2t; -1 + 3t; 1 + 5t)$.

Thế x, y, z vào phương trình của $(\alpha)$, ta được:

$2(2 + 2t) + (-1 + 3t) + (1 + 5t) - 8 = 0$, suy ra $t = \dfrac{1}{3}$ và được giao điểm là $A\left(\dfrac{8}{3}; 0; \dfrac{8}{3}\right)$.

c) Hình chiếu d' của d lên $(\alpha)$ đi qua giao điểm A.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(\alpha)$ thì (P) có VTPT

$\overrightarrow{n_P} = [\vec{u}, \vec{n}] = (-2; 8; -4)$ hay $(1; -4; 2)$.

Hình chiếu d' là giao tuyến của $(\alpha)$ với (P) nên có VTCP:

$\vec{u}\,' = [\vec{n}, \overrightarrow{n_P}] = (6; -3; -9)$ hay $(2; -1; -3)$.

Vậy đường thẳng d' có phương trình tham số: $\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} + 2t \\ y = -t \\ z = \dfrac{8}{3} - 3t \end{cases}$

**Ví dụ 10:** Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(2; 4; -1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(2; 4; 3)$, $D(2; 2; -1)$.

a) Chứng minh đường thẳng AB và AC, AB và AD, AD và AC vuông góc nhau.

b) Lập phương trình đường vuông góc chung d của AB và CD.

c) Tính góc hợp bởi d và mp(ABD).

## Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -2; 0)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AD}\ \ \overrightarrow{AC} = 0$.

Vậy $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AD \perp AC$.

b) Ta có $AB \perp AC, AD \Rightarrow AB \perp (ACD)$.

Đường thẳng CD nằm trên mặt phẳng (ACD) mà mặt phẳng (ACD) vuông góc với AB nên đường vuông góc chung d của AD và CD là đường thẳng qua A và vuông góc với CD. Vậy đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (0; -4; 2)$ hay $(0; -2; 1)$ và phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

ABC

b) Mặt phẳng (ABD) có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (0; 0; 2).$$

Vậy góc nhọn φ giữa Δ và mặt phẳng (ABD) xác định bởi:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

**Ví dụ 11**: Cho hai đường thẳng: d: $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ d': $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$

a) Chứng minh rằng d và d' đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa chúng.

b) Tính thể tích hình tứ diện giới hạn bởi mp(P) và ba mặt phẳng toạ độ.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nói trên.

**Giải**

a) Hai đường thẳng d và d' có toạ độ của 2 VTCP không tỉ lệ nên không song song, không trùng nhau, để chứng minh chúng đồng phẳng, ta chứng minh chúng cắt nhau.

Điểm M nằm trên d có toạ độ $(7 + 3t; 2 + 2t; 1 - 2t)$, nó nằm trên d' khi và chỉ khi $\dfrac{7+3t-1}{2} = \dfrac{2+2t+2}{-3} = \dfrac{1-2t-5}{4} \Leftrightarrow t = -2.$

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau, suy ra chúng đồng phẳng.

Mặt phẳng (P) chứa d và d' là mặt phẳng đi qua điểm $M_o(7; 2; 1)$ của d và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{u}\,'] = (2; -16; -13)$ do đó mp(P) có phương trình

$$2(x - 7) - 16(y - 2) - 13(z - 1) = 0 \text{ hay } 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$

b) Giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục toạ độ là:

$$A\left(-\frac{31}{2}; 0\ ;\ 0\right)\quad B\left(0; \frac{31}{16}; 0\right) \text{ và } C\left(0\ ;\ 0; \frac{31}{13}\right)$$

Thể tích tứ diện OABCD là

$$V = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\frac{31}{2}\,\frac{31}{6}.\frac{31}{13} = \frac{29791}{936}$$

c) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC đi qua gốc O nên có phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz = 0.$

Lần lượt thay toạ độ các điểm A, B, C vào phương trình đó, ta tìm được các giá trị $a = \dfrac{31}{4}$ $b = \dfrac{-31}{32}$, $c = -\dfrac{31}{26}$ và được phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{31}{2}x - \dfrac{31}{16}y - \dfrac{31}{13}z = 0.$

**Ví dụ 12:** Cho bốn điểm A(1; 6; 2), B(4; 0; 6), C(5; 0; 4), D(5; 1; 3).

a) Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

c) Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD). Tìm toạ độ tiếp điểm.

**Giải**

a) $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -6; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (4; -5; 1)$

Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 10; 6)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 12.4 - 5.10 + 6.1 = 4 \neq 0$.

Vậy A, B, C, D không đồng phẳng, suy ra ABCD là hình tứ diện.

b) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

c) $\overrightarrow{BC} = (1; 0; -2)$, $\overrightarrow{BD} = (1; 1; -3)$. Mặt phẳng (BCD) có VTPT

$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (2; 1; 1)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua B(4; 0; 6) có phương trình:

$2(x - 4) + 1(y - 0) + 1(z - 6) = 0$ hay $2x + y + z - 14 = 0$.

Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD) có bán kính

$$R = d(A; (BCD)) = \frac{|2.1 + 1.6 + 1.2 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 + (z - 2)^2 = \frac{8}{3}$

Gọi H là tiếp điểm thì AH là đường thẳng đi qua A, vuông góc với mp(BCD) nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{n} = (2; 1; 1)$.

Vậy AH có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Kết hợp với phương trình của mp(BCD), ta suy ra toạ độ của tiếp điểm H ứng với $t = \frac{2}{3}$ là $H\left(\frac{7}{3}; \frac{20}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

**Ví dụ 13**: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

a) Tìm m để (P): $x - 2y + 2z - m = 0$ có điểm chung CA với (S).

b) Tìm toạ độ giao điểm của (S) với đường thẳng đi qua hai điểm M(1; 1; 1) và N(2; –1; 5) và viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc của mặt cầu (S) tại các giao điểm đó.

c) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm gốc toạ độ.

d) Tìm các bán kính của các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ Oxy, Oyz, Ozx.

**Giải**

a) (S) có tâm I(1; 2; 3), $R = \sqrt{14}$

Điều kiện (P) có điểm chung với (S): $d(I, (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|1 - 4 + 6 - m|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \leq \sqrt{14}$

$\Leftrightarrow |3 - m| \leq 3\sqrt{14} \Leftrightarrow 3 - 3\sqrt{14} \leq m \leq 3 + 3\sqrt{14}$.

ABC

b) Phương trình tham số của đường thẳng MN là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

Tham số t ứng với giao điểm của đường thẳng MN với (S) là nghiệm của phương trình:

$$(1 + t)^2 + (1 - 2t)^2 + (1 + 4t)^2 - 2(1 + t) - 4(1 - 2t) - 6(1 + 4t) = 0$$

$\Leftrightarrow 21t^2 - 12t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\dfrac{3}{7}$

Với t = 1 ta có giao điểm thứ nhất là: $M_1(2; -1; 5)$

Với $t = -\dfrac{3}{7}$ ta có giao điểm thứ hai là: $M_2\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{13}{7}; -\dfrac{5}{7}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IM_1} = (1; -3; 2)$, $\overrightarrow{IM_2} = \left(-\dfrac{3}{7}; -\dfrac{1}{7}; -\dfrac{26}{7}\right)$.

Mặt phẳng tiếp xúc của (S) tại $M_1(2; -1; 5)$ có phương trình

$$1(x - 2) - 3(y + 1) + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 2z - 15 = 0.$$

Mặt phẳng tiếp xúc của (S) tại $M_2\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{13}{7}; -\dfrac{5}{7}\right)$ có phương trình:

$$\frac{-3}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right) - \frac{1}{7}\left(y - \frac{13}{7}\right) - \frac{26}{7}\left(z + \frac{5}{7}\right) = 0 \Leftrightarrow 21x + 7y + 182z + 105 = 0.$$

c) Ta có $\overrightarrow{OI} = (1; 2; 3)$. Vậy mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu đi qua O và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OI}$. Phương trình của nó là: $x + 2y + 3z = 0$.

d) Gọi $r_1$, $r_2$, $r_3$ là bán kính đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ thì:

$$r_1 = \sqrt{R^2 - z_I^2} = \sqrt{14 - 9} = \sqrt{5},\ r_2 = \sqrt{13},\ r_3 = \sqrt{10}$$

**Ví dụ 14**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + 3y - 3z + 1 = 0$, đường thẳng d: $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z + 5}{1}$ và ba điểm $A(4; 0; 3)$, $B(-1; -1; 3)$, $C(3; 2; 6)$.

a) Tính góc giữa d và mp(P).

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

c) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính lớn nhất.

**Giải**

a) d có VTCP $\vec{u} = (2; 9; 1)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (2; 3; -3)$.

Gọi φ là góc giữa d và (P) thì:

ABC

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right| = \frac{|4+27-3|}{\sqrt{4+81+1}.\sqrt{4+9+9}} = \frac{28}{\sqrt{1892}}$$

b) Tâm I(a; b; c) của (S) xác định bởi hệ $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ I \in (P) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-a)^2+(0-b)^2+(3-c)^2 = (-1-a)^2+(-1-b)^2+(3-c)^2 \\ (4-a)^2+(0-b)^2+(3-c)^2 = (3-a)^2+(2-b)^2+(6-c)^2 \\ 2a+3b-3c+1=0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: a = 1, b = 2, c = 3 và bán kính $R = IA = \sqrt{13}$

Phương trình của (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 13$.

c) Mặt phẳng (Q) cần tìm chính là mặt phẳng chứa d và đi qua tâm I của (S).

Đường thẳng d đi qua M(3; 0; –5) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 9; 1)$.

Ta có $\overline{IM} = (2; -2; -8)$, do đó vectơ pháp tuyến của (Q) là

$[\vec{u}', \vec{u}] = (70; -18; 22)$ hay (35; –9; 11).

Mà (Q) đi qua I(1; 2; 3) nên phương trình của (Q) là:

$$35(x-1) - 9(y-2) + 11(z-3) = 0 \text{ hay } 35x - 9y + 11z - 50 = 0.$$

**Ví dụ 15:** Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$d_1$: $x = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+4}{2}$ và $d_2$: $\dfrac{x+8}{2} = y-6 = \dfrac{z-10}{-1}$

a) Chứng minh hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa $d_2$ và song song với $d_1$. Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.

c) Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Ox, cắt $d_1$ tại M, cắt $d_2$ tại N. Tìm toạ độ các điểm M, N.

d) Gọi AB là đường vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$ ($A \in d_1$, $B \in d_2$). Hãy viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

**Giải**

a) Đường thẳng $d_1$ đi qua điểm $M_1(0; 2; -4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; -1; 2)$. Đường thẳng $d_2$ đi qua điểm $M_2(-8; 6; 10)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; -1)$.

Ta có $[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (-1; 5; 3)$, $\overline{M_1M_2} = (-8; 4; 14)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] . \overline{M_1M_2} = 70 \neq 0 \Rightarrow d_1, d_2$ chéo nhau.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa $d_2$ và song song với $d_1$. Khi đó mp(α) qua điểm $M_2(-8; 6; 10)$ và có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-1; 5; 3) \Rightarrow (\alpha): x - 5y - 3z + 68 = 0.$$

$$d(d_1, d_2) = d(M_1, (\alpha)) = \frac{|0-10+12+68|}{\sqrt{1+25+9}} = \frac{70}{\sqrt{35}} = 2\sqrt{35}$$

ABC

c) Viết phương trình đường thẳng $d_1$, $d_2$ dưới dạng tham số.

Từ đó: $M \in d_1$ nên $M(t; 2 - t; -4 + 2t)$

$N \in d_2$ nên $N(-8 + 2t'; 6 + t'; 10 - t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-8 + 2t' - t; 4 + t' + t; 14 - t' - 2t)$

Đường thẳng MN sẽ là đường thẳng d phải tìm khi MN // Ox hay hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{i}\,(1; 0; 0)$ cùng phương, nghĩa là $\begin{cases} t' + t = -4 \\ t' + 2t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 18 \\ t = -22 \end{cases}$

Vậy $M(18; -16; 32)$ và đường thẳng d phải tìm có phương trình tham số:

$$d: \begin{cases} x = 18 + t \\ y = -16 \\ z = 32 \end{cases}$$

d) $A \in d_1 \Rightarrow A(t; 2 - t; -4 + 2t)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-8 + 2t'; 6 + t'; 10 - t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-8 + 2t' - t; 4 + t' + t; 14 - t' - 2t)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow 6t + t' = 16$; $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow t + 6t' = 26$.

Giải hệ $\begin{cases} 6t + t' = 16 \\ t + 6t' = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; 0; 0) \\ B(0; 10; 6) \end{cases}$

Suy ra mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm của AB là $I(1; 5; 3)$, bán kính $R = IA = \sqrt{35}$.

Phương trình của nó là: $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = 35$.

**Ví dụ 16**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha)$: $2x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z}{-2}$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của d với $(\alpha)$.

b) Tính cosin của góc hợp bởi d và $(\alpha)$.

c) Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d, tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha)$ và (Oxy).

**Giải**

a) Gọi M là giao điểm của d với $(\alpha)$. Toạ độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z}{-2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2}; 2; -1\right)$.

b) Vectơ pháp tuyến của $(\alpha)$ là $\vec{n} = (2; -1; 2)$, vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 2; -2)$. Gọi $\varphi$ là góc giữa d và $(\alpha)$ thì:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \frac{|2 - 2 - 4|}{3.3} = \frac{4}{9}$$

Ta có $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{65}}{9}$

c) Gọi $I(1 + t; 1 + 2t; -2t) \in d$ là tâm của mặt cầu (S) cần tìm.

ABC

Do (S) tiếp xúc với ($\alpha$) và mặt phẳng (Oxy) nên:

$$d(I, (\alpha)) = d(I, Oxy)) \Leftrightarrow \frac{|2(1+t) - (1+2t) - 4t + 1|}{3} = |2t|$$

$$\Leftrightarrow |2t - 1| = |3t| \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{5}$$

Với $t = -1$ thì (S) có tâm $I(0; -1; 2)$ và bán kính $R = 2$ nên (S) có phương trình $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Với $t = \frac{1}{5}$ thì (S) có tâm $I\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ và bán kính $R = \frac{2}{5}$ nên (S) có phương trình $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(z + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

**Ví dụ 17:** Trong không gian toạ độ Oxyz cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Gọi d' là giao tuyến của hai mặt phẳng:
($\alpha$): $3y - z - 7 = 0$ và ($\alpha'$): $3x + 3y - 2z - 17 = 0$.

a) Chứng minh d, d' chéo nhau và vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d' và vuông góc với d. Tìm toạ độ giao điểm H của d và (P).

c) Một mặt phẳng (Q) thay đổi, luôn song song với mp(Oxy), cắt d, d' lần lượt tại M, M'. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MM'.

**Giải**

a) Đường thẳng d' là giao tuyến của hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 3; -1)$ và $\vec{n}' = (3; 3; -2)$ nên d' có một vectơ chỉ phương là:
$\overrightarrow{u_{d'}} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (-3; -3; -9)$ hay $(1; 1; 3)$

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d là $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -1)$. Ta có $\overrightarrow{u_d}\ \ \overrightarrow{u_{d'}} = 0$ nên $d \perp d'$.

Hệ $\begin{cases} 3(-1+t) - (2-t) - 7 = 0 \\ 3(1+2t) + 3(-1+t) - 2(2-t) - 17 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm nên d và d' không có điểm chung. Vậy chúng chéo nhau.

b) Cho $y = 0$ thì $z = -7$, $x = 1$, ta có $A(1; 0; -7) \in d'$. Vì $d \perp d'$ nên mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d sẽ đi qua d'.
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:

$$2(x - 1) + (y - 0) - (z + 7) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 9 = 0.$$

Toạ độ giao điểm H(x; y; z) của d và (P) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ 2x + y - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow H\left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

c) Mặt phẳng (Q) song song với mp(Oxy) nên có phương trình: $z = m$ ($m \neq 0$).
Toạ độ giao điểm M(x; y; z) của d và (Q) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M(5 - 2m;\ 1 - m;\ m)$$

Toạ độ giao điểm M'(x; y; z) của d' và (Q) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 3y - z - 7 = 0 \\ 3x + 3y - 2z - 17 = 0 \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{10 + m}{3}; \frac{7 + m}{3};\ m\right)$$

Gọi I là trung điểm của MM' thì $I\left(\frac{25 - 5m}{6}; \frac{5 - m}{3};\ m\right)$

Vậy quỹ tích của I là đường thẳng có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \frac{25}{6} - \frac{5m}{6} \\ y = \frac{5}{3} - \frac{m}{3} \\ z = m \end{cases}$$ bỏ đi điểm $A\left(\frac{25}{6}; \frac{5}{3}; 0\right)$ (ứng với m = 0).

**Ví dụ 18**: Trong không gian Oxyz cho điểm S(2; 0; –1) và vectơ $\vec{u} = (1; 0; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua S có vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

a) Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thuộc mặt phẳng Oxy mà góc giữa Δ và đường thẳng SM bằng $60^\circ$ là một hypebol (H). Hãy tìm toạ độ các tiêu điểm của (H).

b) Gọi $(P_1)$ và $(P_2)$ là các mặt phẳng đi qua S và chứa một trong hai đường tiệm cận của (H). Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm thuộc (H) đến hai mặt phẳng $(P_1)$ và $(P_2)$ là một đại lượng không đổi.

**Giải**

a) $M \in mp(Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$, $\overrightarrow{SM} = (x - 2; y; 1)$

Góc giữa đường thẳng SM và Δ bằng $60^\circ$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \left|\cos(\overrightarrow{SM}, \vec{u})\right| = \frac{|1(x - 2) + 0.y + 1.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}.\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Vậy trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), tập hợp các điểm M mà góc giữa đường thẳng SM và Δ bằng $60^\circ$ là một hypebol (H) có phương trình là:

(H): $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$, $z = 0$.

Các tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{6}; 0; 0)$, $F_2(\sqrt{6}; 0; 0)$

b) Hypebol (H) có hai đường tiệm cận $\Delta_1$ và $\Delta_2$ lần lượt có phương trình:

$y = \pm x$, $z = 0$.

Phương trình của mặt phẳng $(P_1)$ là: $x - y + 2z = 0$.

Phương trình của mặt phẳng $(P_2)$ là: $x + y + 2z = 0$.

Giả sử N là một điểm bất kì thuộc (H) thì N có toạ độ $(X; Y; 0)$ và
$\frac{X^2}{3} - \frac{Y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow X^2 - Y^2 = 3$

$$\text{Ta có: } d(N, (P_1)).d(N, (P_2)) = \frac{|X - Y + 2.0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} \cdot \frac{|X + Y + 2.0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{|X^2 - Y^2|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{: không đổi.}$$

**Ví dụ 19:** Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1; 0; 0)$ và $A'(-1; 0; 0)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua A và song song với Oz, $\Delta'$ là đường thẳng đi qua A' và song song với Oy.

a) Tìm tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng (Oxy) và cách đều $\Delta$ và $\Delta'$.

b) Tìm tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng (Oyz) và cách đều $\Delta$ và $\Delta'$.

**Giải**

a) Trục Oy có VTCP $\vec{j} = (0; 1; 0)$, trục Oz có VTCP $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Giả sử M là một điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) thì $M(x; y; 0)$. Ta có:

$$d(M, \Delta) = d(M, \Delta') \Leftrightarrow \frac{\left|[\overrightarrow{AM}, \vec{k}]\right|}{|\vec{k}|} = \frac{\left|[\overrightarrow{A'M}, \vec{j}]\right|}{|\vec{j}|}$$

$\Leftrightarrow y^2 + (x - 1)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4x$.

Vậy tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng (Oxy) cách đều $\Delta$ và $\Delta'$ là một parabol có phương trình: $y^2 = 4x$, $z = 0$.

b) Điểm $M \in mp(Oyz)$ thì $M(0; y; z)$. Ta có:

$$d(M, \Delta) = d(M, \Delta') \Leftrightarrow \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \vec{k}\right]\right|}{|\vec{k}|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'M}, \vec{j}\right]\right|}{|\vec{j}|}$$

$\Leftrightarrow y^2 + 1 = z^2 + 1 \Leftrightarrow y = \pm z$.

Vậy tập hợp các điểm $M \in mp(Oyz)$ cách đều $\Delta$ và $\Delta'$ là hai đường thẳng lần lượt có phương trình: $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$

**Ví dụ 20:** Trong không gian Oxyz cho tập hợp các mặt phẳng $(\alpha_m)$ có phương trình là $mx - 2(m - 1)y + (m + 1)z - 1 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng các mặt phẳng $(\alpha_m)$ đi qua một đường thẳng cố định $\Delta$.

b) Cho đường thẳng d với phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$ Chứng tỏ rằng hai đường thẳng d và $\Delta$ chéo nhau.

ABC

c) Lập phương trình 2 mặt phẳng lần lượt chứa một đường thẳng d hoặc Δ và chứa đường vuông góc chung của chúng.

**Giải**

a) Phương trình các mặt phẳng $(\alpha_m)$ có thể viết thành:

$$2y + z - 1 + m(x - 2y + z) = 0$$

Đẳng thức này đúng với mọi m nên ta suy ra: $\begin{cases} 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

Hệ phương trình này xác định một đường thẳng Δ cố định là giao tuyến của 2 mặt phẳng $2y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z = 0$.

Δ có VTCP $\vec{v} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (4; 1; -2)$ và đi qua $B(-1; 0; 1)$.

Vậy các mặt phẳng $(\alpha_m)$ đi qua đường thẳng cố định Δ: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$

b) d qua $A(1; 0; -2)$ và có VTCP $\vec{u} = (-2; 3; -1)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$ nên d và Δ chéo nhau.

c) Đường vuông góc chung IJ có VTCP: $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-5; -8; -14)$

Mặt phẳng (P) chứa d và IJ nên có VTPT

$\overrightarrow{n_P} = [\vec{u}, \vec{a}] = (-50; -23; 31)$ và đi qua $A(1; 0; -2)$ nên có phương trình:

$-50(x - 1) - 23(y - 0) + 31(z + 2) = 0$ hay $50x + 23y - 31z - 112 = 0$.

Mặt phẳng (Q) chứa Δ và IJ nên có VTPT

$\overrightarrow{n_Q} = [\vec{v} . \vec{a}] = (-30; 66; -27)$ và đi qua $B(-1; 0; 1)$ nên có phương trình:

$-10(x + 1) + 22(y - 0) - 9(z - 1) = 0$ hay $10x - 22y + 9z + 1 = 0$.

Chú ý: Đường vuông góc chung IJ là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P), (Q).

**Ví dụ 21**: Trong không gian Oxyz, xét mặt phẳng

$(\alpha_m)$: $3mx + 5\sqrt{1 - m^2}\,y + 4mz + 20 = 0$, $m \in [-1; 1]$

a) Tính khoảng cách từ gốc O tới mặt phẳng $(\alpha_m)$.

b) Chứng minh rằng với mọi $m \in [-1; 1]$, $(\alpha_m)$ tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

c) Với giá trị nào của m, hai mặt phẳng $(\alpha_m)$ và (Oxz) cắt nhau? Khi m thay đổi, chứng minh rằng các giao tuyến đó song song.

**Giải**

a) $d(O; (\alpha_m)) = \dfrac{20}{\sqrt{9m^2 + 25(1 - m^2) + 16m^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = 4$

b) Từ câu a) suy ra rằng: Khi m thay đổi, các mặt phẳng $(\alpha_m)$ luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm O và bán kính bằng 4.

c) Mặt phẳng $(\alpha_m)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3m; 5\sqrt{1-m^2}; 4m)$ vì vậy $(\alpha_m)$ cắt mp(Oxz) khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó giao tuyến $\Delta_m$ của mp$(\alpha_m)$ và mp(Oxz) là giao tuyến của hai mặt phẳng:

$$3mx + 5\sqrt{1 - m^2}\,y + 4mz + 20 = 0 \text{ và } y = 0.$$

Do đó, vectơ chỉ phương của $\Delta_m$ là $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{j}] = (-4m ; 0; 3m)$

Vì $m \neq 0$ nên $\vec{u} = (4; 0; -3)$ là một vectơ chỉ phương của $\Delta_m$.

Do $\vec{u}$ không phụ thuộc vào m nên các giao tuyến $\Delta_m$ song song với nhau khi m thay đổi.

**Ví dụ 22**: Cho tứ diện ABCD có 4 đỉnh xác định: $\overline{OA} = -2\vec{j}$ $\overline{OB} = \sqrt{3}.\vec{i} + \vec{j}$ $\overline{OC} = -\sqrt{3}.\vec{i} + \vec{j}$ $\overline{OD} = 2\sqrt{2}.\vec{k}$.

a) Chứng minh ABCD là tứ diện đều.

b) Viết phương trình tham số của đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng AB và CD.

c) Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABD).

**Giải**

Ta có $A(0; -2; 0)$, $B(\sqrt{3}; 1; 0)$, $C(-\sqrt{3}; 1; 0)$, $D(0; 0; 2\sqrt{2})$

a) $AB^2 = 3 + 9 = 12$, $AC^2 = 3 + 9 = 12$, $AD^2 = 4 + 8 = 12$.

Tương tự $BC^2 = CD^2 = DC^2 = 12$.

Do đó 6 cạnh cùng bằng $2\sqrt{3}$ nên ABCD là tứ diện đều.

b) Vì ABCD là tứ diện đều nên đường vuông góc chung Δ của AB và CD là đoạn thẳng nối các trung điểm I và J tương ứng của AB và CD.

Ta có: $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ $J\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$

Vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 1; \sqrt{2})$.

Vậy phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}t \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$

c) Mặt phẳng (ABD) có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = [\overline{AB}, \overline{AD}] = (6\sqrt{2}; -2\sqrt{6}; 2\sqrt{3}) \text{ hay } (3\sqrt{2}; -\sqrt{6}, \sqrt{3}).$$

Vậy góc nhọn φ giữa Δ và mặt phẳng (ABD) xác định bởi

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{3}.\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi \approx 36^\circ 16'.$$

**Ví dụ 23**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho bốn điểm: $A(6; -2; 3)$, $B(0; 1; 6)$, $C(2; 0; -1)$, $D(4; 1; 0)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Xác định toạ độ tâm I và bán kính của mặt cầu.

d) Viết phương trình đường tròn qua ba điểm A, B, C. Hãy tìm toạ độ tâm và bán kính của nó.

ABC

## Giải

a) $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; -4)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; 3; -3)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; -36; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = -72 \neq 0$

Vậy A, B, C, D không đồng phẳng nên là 4 đỉnh của tứ diện.

b) $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{|-72|}{6} = 12.$

c) Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Phương trình của (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cx + d = 0.$

(S) qua A, B, C, D nên ta có hệ: $\begin{cases} 12a - 4b + 6c + d = -49 \\ 2b + 12c + d = -37 \\ 4a - 2c + d = -5 \\ 8a + 2b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = -3 \end{cases}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là:

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$ có tâm $I(2; -1; 3)$,

$R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 3} = \sqrt{17}$

d) Mặt phẳng (ABC) có pháp tuyến

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; -36; 0)$ hay $(1; 2; 0)$ và qua A nên (ABC):

$x + 2y - 2 = 0.$

Phương trình đường tròn qua ba điểm A, B, C là:

(C): $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$

Tâm của mặt cầu (S) có toạ độ $I(2; -1; 3)$. Đường thẳng $\Delta$ qua I và vuông góc với mp(ABC) có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}.$

Tham số t ứng với giao điểm H của $\Delta$ và mp(ABC) là tâm đường tròn giao tuyến:

$$(2 + t) + 2(-1 + 2t) - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow H\left(\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}; 3\right).$$

Đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \dfrac{\sqrt{405}}{5}$

**Ví dụ 24:** Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với $A(0; -3; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $B_1(4; 0; 4)$

a) Tìm toạ độ đỉnh $A_1$, $C_1$. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mp($BCC_1B_1$).

ABC

b) Gọi M là trung điểm của $A_1B_1$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, M và song song với $BC_1$. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng $A_1C_1$ tại N. Tính độ dài MN.

**Giải**

a) Ta có: $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = (0; 0; 4)$ nên $A_1(0; -3; 4)$, $C_1(0; 3; 4)$ và $\overline{BC} = (-4; 3; 0)$ nên $[\overline{BC}, \overline{BB_1}] = (12; 16; 0)$ là VTPT của $(BCC_1B_1)$

$(BCC_1B_1)$: $12(x - 4) + 16y = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

Bán kính $R = d(A; (BCC_1B_1)) = \dfrac{24}{5}$ nên phương trình mặt cầu:

$$x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$$

b) Ta có: $M(2; -\dfrac{3}{2}; 4)$, $\overline{AM} = (2; \dfrac{3}{2}; 4)$, $\overline{BC_1} = (-4; 3; 4)$

(P) có VTPT $\overline{n} = [\overline{AM}, \overline{BC_1}] = (-6; -24; 12)$

Suy ra (P): $x + 4y - 2z + 12 = 0$

$\overline{A_1C_1} = (0; 6; 0)$ nên $A_1C_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}$

N thuộc $A_1C_1$ nên $N(0; -3 + t; 4)$ và N thuộc (P) nên t = 2, do đó $N(0; -1; 4)$.

Vậy $MN = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

**Ví dụ 25**: Trong không gian toạ độ Oxyz cho mặt phẳng ($\alpha$): $Ax + By + Cz + D = 0$, $ABC \neq 0$ và điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ không thuộc ($\alpha$). Các đường thẳng qua $M_o$ lần lượt song song với các trục toạ độ Ox, Oy, Oz cắt ($\alpha$) tại $M_1$, $M_2$, $M_3$.

a) Xác định điểm $M_1$ và tính đoạn $M_0M_1$

b) Tính thể tích khối tứ diện $M_0M_1M_2M_3$.

**Giải**

a) Gọi $d_1$ là đường thẳng qua $M_0(x_0; y_o; z_o)$ và song song với trục Ox thì $d_1$ có vectơ chỉ phương là $\overline{i} = (1; 0; 0)$.

Ta có phương trình của $d_1$ là: $d_1 : \begin{cases} x = x_o + t \\ y = y_o \\ z = z_o \end{cases}$

Gọi $M_1$ là giao điểm của $d_1$ với mp($\alpha$). Toạ độ (x; y; z) của $M_1$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x = x_o + t \\ y = y_o \\ z = z_o \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1\left(x_o - \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{A}; y_o; x_o\right)$$

ABC

Do đó $M_oM_1 = \left|\dfrac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{A}\right|$.

b) Gọi $d_2$ là đường thẳng đi qua $M_o$ và song song với Oy, $d_2$ cắt $(\alpha)$ tại $M_2$ thì: $M_oM_2 = \left|\dfrac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{B}\right|$

Gọi $d_3$ là đường thẳng đi qua $M_o$ và song song với Oz, $d_3$ cắt $(\alpha)$ tại $M_3$ thì $M_oM_3 = \left|\dfrac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{C}\right|$

Ta có $M_oM_1$, $M_oM_2$, $M_oM_3$ đôi một vuông góc, do đó:

$$V_{M_oM_1M_2M_3} = \frac{1}{6}M_oM_1.M_0M_2.M_oM_3 = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|^3}{6.|A.B.C|}$$

**Ví dụ 26:** Trong không gian Oxyz cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $A_1(0; 0; 0)$, $B_1(1; 0; 0)$, $D_1(0; 2; 0)$, $A(0; 0; 3)$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, $B_1C_1$, $C_1D_1$, $D_1D$:

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ chứa chúng.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng $(\alpha)$. Tính thể tích của khối chóp có đỉnh C và đáy là thiết diện đó.

c) Tìm toạ độ điểm I đối xứng với điểm $A_1$ qua đường thẳng MP Hỏi điểm I nằm trong hay ngoài hình hộp?.

**Giải**

a) Ta có $M(\frac{1}{2}; 0; 3)$, $N(1; 1; 0)$, $P(\frac{1}{2}; 2; 0)$, $Q(0; 2; \frac{3}{2})$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $6x + 3y + 2z - 9 = 0$.

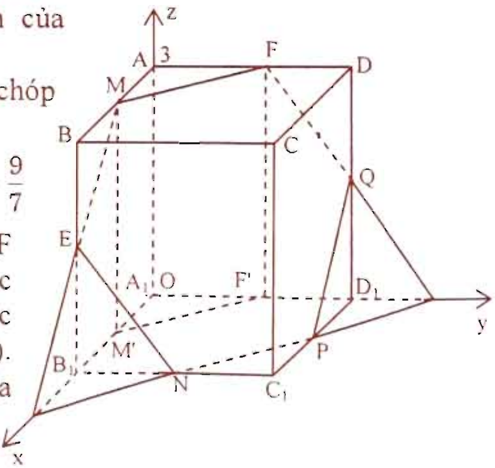
Thay toạ độ của điểm Q vào phương trình trên, ta thấy nó thoả mãn.

Vậy bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng, và phương trình của mặt phẳng $(\alpha)$, là: $6x + 3y + 2z - 9 = 0$.

b) Thiết diện là lục giác MENPQF có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình hộp chữ nhật ta có C(1; 2; 3)

Gọi h là chiều cao của hình chóp C.MENPQF thì:

$$h = d(C, (\alpha)) = \frac{|6.1 + 3.2 + 2.3 - 9|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{9}{7}$$



Gọi M', F' là hình chiếu của M và F lên $mp(A_1B_1C_1D_1)$ thì lục giác $M'B_1NPD_1F'$ là hình chiếu của lục giác MENPQF lên $mp(A_1B_1C_1D_1)$. Gọi $\varphi$ là góc giữa $mp(\alpha)$ và đáy của hình hộp thì:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overline{n_\alpha}, \vec{k}\right)\right| = \frac{2}{7}$$

$$S_{M'B_1NPD_1F'} = \frac{3}{2} \text{ và } S_{M'B_1NPD_1F'} = S_{MENPQF}.\cos\varphi$$

$$\Rightarrow S_{MENPQF} = \frac{S_{M'B_1NPD_1F'}}{\cos\varphi} = \frac{21}{4}$$

Vậy $V_{C.MENPQF} = \frac{1}{3}.\frac{21}{4}.\frac{9}{7} = \frac{9}{4}$

c) Mặt phẳng qua $A_1$ và vuông góc với MP có phương trình: $2y - 3z = 0$. Gọi H là giao điểm của đường thẳng MP và mặt phẳng trên, ta có: $H\left(\frac{1}{2};\frac{18}{13};\frac{12}{13}\right)$. Từ đó ta tìm được toạ độ điểm I là: $\left(1;\frac{36}{13};\frac{24}{13}\right)$

Điểm T(x; y; z) nằm trong hình hộp

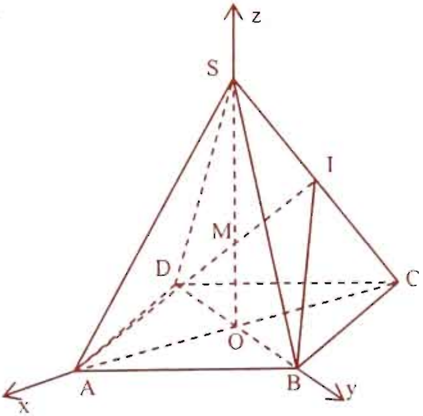
$\Leftrightarrow 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3$. Nhưng tung độ của điểm I là $y = \frac{36}{13} > 2$.

Vậy điểm I nằm ngoài hình hộp.

**Ví dụ 27:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm của cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI).

**Giải**

Ta chọn hệ toạ độ Oxyz sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, tia Ox chứa OA, tia Oy chứa OB, tia Oz chứa OS.



Khi đó: $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0\ ;\ 0\right)$

$B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, S(0; 0; h).

Ta có giao điểm M của SO và AI chính là trọng tâm tam giác SAC nên $M(0; 0; \frac{h}{3})$

Mặt phẳng (ABI) cũng chính là mặt phẳng (ABM).

Vậy mp(ABI) có phương trình là:

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{h}{3}} = 1$$

Do đó, khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABI) là:

$$d(S; (ABI)) = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$$

ABC

**Ví dụ 28**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD.

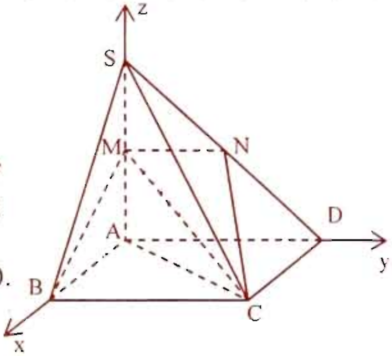
a) Tính khoảng cách từ A đến mp(BCM); khoảng cách giữa hai đường SB và CN.

b) Tính cosin của góc hợp bởi 2 mặt phẳng (SCD), (SBC).

c) Tính tỉ số thể tích của hai phần hình chóp được chia bởi mặt phẳng (BCM).

**Giải**

Chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc O là điểm A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa SA. Khi đó A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; a; 0), S(0; 0; 2a), M(0; 0; a), N(0; $\frac{a}{2}$; a)



a) $\overrightarrow{BC} = (0; a; 0)$, $\overrightarrow{BM} = (-a; 0; a)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] = (a^2; 0; a^2)$

Do đó, mặt phẳng (BCM) có một vectơ pháp tuyến là (1; 0; 1), suy ra phương trình mặt phẳng (BCM) là:

$$1(x - a) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + z - a = 0.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mp(BCM) là:

$$d(A, (BCM)) = \frac{|-a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ta có: $\overrightarrow{BS} = (-a; 0; 2a)$, $\overrightarrow{CN} = (-a; -\frac{a}{2}; a)$, $\overrightarrow{SC} = (a; a; -2a)$

Suy ra $[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}] = \left(a^2; -a^2; \frac{a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}].\overrightarrow{SC} = a^3 - a^3 - a^3 = -a^3$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CN là:

$$d(SB, CN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right]\right|} = \frac{2a}{3}$$

b) Vì $[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}] = (0; -2a^2; -a^2)$ nên mp(SCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 2; 1)$.

Vì $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2; 0; a^2)$ nên mp(SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}' = (2; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC)

Ta có: $\cos\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|.|\vec{n}'|} = \frac{|1|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

c) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2\ 2a = \frac{2}{3}a^3$ Vì M là trung điểm của SA, suy ra

$$d(S, (BCM)) = d(A, (BCM)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Hình chóp S.ABCD bị mp(BCM) chia thành hai phần, trong đó có một phần là hình chóp S.BCNM.

Hình chóp này có đường cao bằng d(S; (BCM)) = $\frac{a}{\sqrt{2}}$ và đáy là hình thang BCNM có diện tích bằng $\frac{1}{2}(a+\frac{a}{2})a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4}$

Suy ra: $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{4} \Rightarrow \frac{V_{S.BCMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{3}{8}$

Vậy tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp S.ABCD chia bởi mp(BCM) là $\frac{3}{5}$

**Ví dụ 29**: Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1.

a) Tính góc tạo bởi các đường thẳng AC' và A'B.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', BC, DD'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng (MNP).

c) Tính thể tích tứ diện AMNP.

**Giải**

a) Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc O là đỉnh A' của hình lập phương, tia Ox chứa A'B', tia Oy chứa A'D' và tia Oz chứa A'A. Khi đó A'(0; 0; 0), B'(1; 0; 0), D'(0; 1; 0), A(0; 0; 1), C(1; 1; 1), B(1; 0; 1), D(0; 1; 1), C'(1; 1; 0)

Do đó: $\overline{AC}' = (1; 1; -1)$, $\overline{A'B} = (1; 0; 1)$

$\Rightarrow \overline{AC}'.\overline{A'B} = 0 \Rightarrow AC' \perp A'B$

b) Ta có $M(\frac{1}{2}; 0; 0)$, $N(1; \frac{1}{2}; 1)$, $P(0; 1; \frac{1}{2})$.

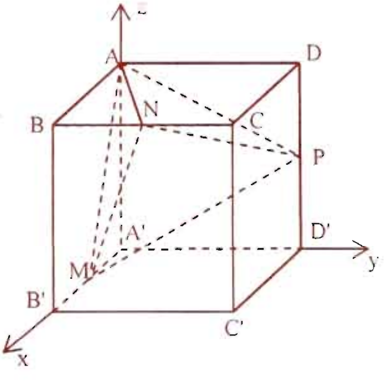
$\overline{MN} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1) \Rightarrow \overline{MN} \quad \overline{AC}' = 0$

$\Rightarrow MN \perp AC'$.

$\overline{MP} = (-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}) \Rightarrow \overline{MP}.\overline{AC}' = 0$

$\Rightarrow MP \perp AC'$.

Vậy AC' ⊥ mp(MNP)



c) Ta có: $\overline{MA} = (-\frac{1}{2}; 0; 1)$; $[\overline{MN} \quad \overline{MP}] = \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{6}\left|[\overline{MN} \quad \overline{MP}].\overline{MA}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{9}{8}\right| = \frac{3}{16}$.

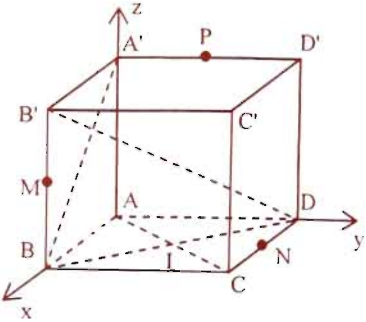
**Ví dụ 30**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh B'B, CD và A'D'

a) Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng A'B, B'D và cặp đường thẳng PI, AC' với I là tâm của đáy ABCD.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C'N, góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và (DCC'D').

**Giải**

a) Ta chọn hệ tục Oxyz sao cho gốc toạ độ là A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AA'. Khi đó



A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0),
A'(0; 0; 1), C(1; 1; 0), D'(0; 1; 1),
B'(1; 0; 1), C'(1; 1; 1).

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (1; 0; -1)$ ;

$\overrightarrow{B'D} = (-1; 1; -1)$, $\overrightarrow{A'B'} = (1; 0; 0)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}] = (1; 2; 1)$ nên:

$$d(A'B, B'D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right]\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ta có: $P(0; \frac{1}{2}; 1)$, $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0) \Rightarrow \overrightarrow{IP} = (-\frac{1}{2}; 0; 1)$

$\overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AP} = (0; \frac{1}{2}; 1)$

Suy ra $$d(PI, AC') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right].\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right]\right|} = \frac{\sqrt{14}}{28}$$

b) Ta có $M(1; 0; \frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2}; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{NC'} = (\frac{1}{2}; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = 0 \Rightarrow MP \perp NC'$

Mặt phẳng (PAI) có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$

Mặt phẳng (DCC'D') có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng trên thì: $\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{2}{3}$.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(5; 1; 3), B(–5; 1; –1), C(1; –3; 0) và D(3; –6; 2). Tìm toạ độ của điểm A' đối xứng của A qua mặt phẳng (BCD).

**ĐS:** A'(1; –7; –5).

**Bài 2**: Trong không gian Oxyz, cho A(0; 0; 1), B(–1; –2; 0) và 3 Tìm hình chiếu H của A lên đường thẳng BC.

ABC

**ĐS:** $H\left(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19}\right)$.

**Bài 3**: Cho đường thẳng (Δ): $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-1}$ Tìm điểm M' đối xứng của M(1; 3; 5) qua (Δ).

**ĐS:** $M'(-5;\ -1;\ 3)$.

**Bài 4:** Cho tứ diện OABC có A(3; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 5)

1) Tìm toạ độ H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC)

2) Tìm toạ độ K là hình chiếu của A trên đường thẳng BC.

**ĐS:** 1) $H\left(\frac{1200}{769};\ \frac{900}{769};\ \frac{720}{769}\right)$ 2) $K\left(0;\ \frac{100}{41};\ \frac{80}{41}\right)$

**Bài 5**: Cho các điểm A(4; −6; 3), B(5; −7; 3). Tìm điểm C trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (P): $8x + 11y + 2z - 3 = 0$ mà tam giác ABC vuông tại B.

**ĐS:** $C\left(-\frac{4}{3}; -\frac{40}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

**Bài 6**: Cho A(0; 0; −3), B(2; 0; −1). Tìm điểm C trên mặt phẳng (P): $3x - 8y + 7z - 1 = 0$ sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

**ĐS:** C (2; −2; −3), $C(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$

**Bài 7:** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): $x + y + z - 4 = 0$ và ba điểm: A(3; 0; 0), B(0; −6; 0), C(0; 0; 6). Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

1) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của điểm G trên (α).

2) Tìm điểm M thuộc (α) sao cho $\left|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\right|$ nhỏ nhất.

**ĐS:** 1) H(2; −1; 3) 2) M(2; −1; 3).

**Bài 8:** Tìm điểm đối xứng của M(3;0;−1) qua đường thẳng

d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$

**HD:** dùng quan hệ vectơ.

**Bài 9:** Tìm điểm đối xứng của A(2; 3; 2) qua mặt phẳng

(P): $x + 2y - 3z + 1 = 0$

**HD:** dùng quan hệ tương giao.

**Bài 10:** Cho tứ diện ABCD với A(2, 3, 1), B(4, 1, −2), C(6, 3, 7), D (−5, −4, 8). Tìm hình chiếu D lên mặt phẳng (ABC).

**ĐS:** $(\frac{-2}{7}; \frac{38}{7}; \frac{34}{7})$.

**Bài 11:** Tính khoảng cách từ điểm A(1; 2; 1) đến đường thẳng (d): $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z + 3$

ABC

**ĐS:** $d(A; (d)) = \sqrt{\frac{347}{26}}$.

**Bài 12:** Trong không gian Oxyz, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

**Bài 13:** Cho tứ diện SABC với các đỉnh $S(-2; 2; 4)$, $A(-2; 2; 0)$, $B(-5; 2; 0)$, $C(-2; 1; 1)$. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối SA và BC.

**ĐS:** $d = \frac{3.\sqrt{10}}{10}$

**Bài 14**: Cho hai đường thẳng song song

$(d_1)$ $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ và $(d_2)$: $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$

Tính khoảng cách giữa $(d_1)$ và $(d_2)$

**ĐS:** $d((d_1); (d_2)) = 25$

**Bài 15**: Cho đường thẳng (d): $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ và hai điểm $A(3; 0; 2)$, $B(1; 2; 1)$. Kẻ AA', BB' vuông góc với đường thẳng (d). Tính độ dài đoạn thẳng A'B'.

**ĐS:** $\frac{11}{\sqrt{14}}$

**Bài 16:** Cho d: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{2}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$.

Tìm toạ độ giao điểm của d với (P) và tính góc giữa d và (P).

**ĐS:** $M(1; 2; 0)$, $\sin\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

**Bài 17**: Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD. Tính góc và khoảng cách giữa hai cạnh AB và CD biết $A(3; -1; 0)$, $B(0; -7; 3)$, $C(-2; 1; -1)$ và $D(3; 2; 6)$.

**ĐS:** $AB \perp CD$ và: $d(AB; CD) = \frac{36}{\sqrt{162}}$.

**Bài 18:** Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P):

(d): $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$

(P): $2x - y - 2z + 1 = 0$

1) Tìm toạ độ các điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

2) Xác định toạ độ của điểm K đối xứng với $I(2; -1; 3)$ qua đường thẳng (d)

**ĐS:** 1) $M_1(9; -2; 12)$, $M_2(-3; 4; -6)$ 2) $K(4; 3; 3)$

**Bài 19:** Cho $A(1; 1; 0)$ và $B(3; -1; 4)$. Tìm điểm I trên đường thẳng (d): $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ sao cho IA + IB nhỏ nhất.

ABC

**ĐS:** I(1; −1; 2).

**Bài 20**: Cho A(−1; 3; −2) và B(−9; 4; 9) và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$.
Tìm điểm K ∈ (P) sao cho AK + BK nhỏ nhất.

**ĐS:** K(−1; 2; 3).

**Bài 21**: Trong không gian Oxyz cho A(1; 1; 2), B(2; 4; 3). Tìm toạ độ các điểm M ∈ (Oxz) và N ∈ (Oxy) để AM + MN + NB có giá trị bé nhất.

**ĐS:** $M\left(\frac{6}{5}; 0;\ 1\right)$, N(3; 1; 0).

**Bài 22:** Cho A (−4, 4, 0), B (2, 0, 4), C (1, 2, −1). Tính khoảng cách từ C đến AB.

**ĐS:** $\sqrt{13}$

**Bài 23:**Tính khoảng cách từ M(3, 2, 4) đến Δ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{3}$

**ĐS:** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

**Bài 24:** Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2} \text{ và } \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{2}$$

**HD:** 2 đường thẳng song song.

**Bài 25:**Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng

$x + 2y + 2z - 1 = 0$ và $x + 2y + 2z + 7 = 0$

**HD:** 2 mặt phẳng song song

**Bài 26:** Tứ diện ABCD có A (1, 2, −1), B(0, 1, 3), C(2, 0, 4), D(−1, 2, 0).
Tính góc, khoảng cách giữa AB và CD

**HD:** dùng công thức.

**Bài 27:**Tính góc giữa đường thẳng, mặt phẳng:

1) α: $x - \sqrt{2}y + z - 4 = 0$ và β: $x - \sqrt{2}y - z + 5 = 0$

2) d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và α: $x + z + 4 = 0$

**ĐS:** 1) $60^0$ 2) $30^0$

**Bài 28:** Cho tứ diện A(1, 1, 3) ,B(6, −1, 0), C(0, 2, 3) ,D(−1, 3, 7).
Tinh cos của góc hợp bởi đường thẳng AD và BC; (ABC)

**HD:** xác định các vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến

**Bài 29:**Chứng minh đường thẳng d: $\frac{x-2}{\sin\alpha} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{\cos\alpha}$ hợp với trục Oy một góc không đổi

**ĐS:** $45^0$

**Bài 30:** Tìm điều kiện để 2 mặt phẳng sau vuông góc :

$5x + y - 3z - 2 = 0$ và $2x + my - 3z + 11 = 0$

**ĐS:** m = −19

ABC

**Bài 31:** Tứ diện ABCD với A(2, 3, 1), B(4, 1, –2), C(6, 3, 7), D (–5, –4, 8). Tính góc giữa 2 đường thẳng AB, CD và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

**ĐS:** $\cos(AB, MN) = \dfrac{11}{3\sqrt{323}}; R = \dfrac{\sqrt{447}}{4}$

**Bài 32:** Cho A (3, 5, –4), B (–1, 1, 2), C(–5, –5, –2) và M (5, 1, 5), N (4, 3, 2), P (–3, –2, 1). Gọi G, E, F là trọng tâm tam giác ABC, MNP và tứ diện MABC. Tính tan góc EGF

**ĐS:** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2050}}{392}$

**Bài 33:** Cho A (4, 3, –1) và α: $3x + 2y + z - 12 = 0$.Tìm M ∈ α để AM bé nhất.

**HD:** M là hình chiếu của A lên $\alpha$

**Bài 34:**Cho A (1, –2, 11), B (–1, 1, 2) và α: $x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm M ∈ α để MA + MB bé nhất.

**HD:** xét vị trí tương đối của A, B với $\alpha$

**Bài 35**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 3 điểm A(0; 1; 1), B(1; 0; 0), C(1; 2; –1).

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A, B, C.

2) Viết phương trình mặt phẳng (β) qua D(0; 1; 0) biết rằng giao tuyến của (α) và (β) là d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{-2}$

**ĐS:** 1) $3x + y + 2z - 3 = 0$ 2) $2x + y + z - 1 = 0$.

**Bài 36:** Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+6}{4}$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 3 = 0$

**ĐS:** $x + 2y - 4 = 0$.

**Bài 37**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau

$(d_1)$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và $(d_2)$: $\begin{cases} x = -t \\ y = -4 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Chứng minh $(d_1) \perp (d_2)$ và lập phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

**ĐS:** (α): $x + 2y - z - 12 = 0$ và (β): $2x + y + 4z = 0$.

**Bài 38**: Trong không gian Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1). Gọi M, N là trung điểm của AB, CD.

1) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng A'C và MN.

2) Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với Oxy góc α mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

**ĐS:** 1) $d(A'C, MN) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 2) (Q): $2x - y + z - 1 = 0$, $x - 2y - z + 1 = 0$

**Bài 39**: Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng chéo nhau (d): $x = 2 + t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$ và (d'): $x = -2t',\ y = 3,\ z = 1 + t'$

**ĐS:** $x + 5y + 2z - 12 = 0$.

**Bài 40**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình:

(P): $x - 2y - z - 2 = 0$ ; (Q): $x + 2y - 4 = 0$

Tìm điểm đối xứng của gốc toạ độ O qua đường thẳng d.

**ĐS:** $O'\left(\frac{104}{21};\ \frac{32}{21};\ \frac{-44}{21}\right)$

**Bài 41**: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và 2 đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}\ ;\ d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với $d_1$ và $d_2$.

2) Tìm M thuộc $d_1$, N thuộc $d_2$ sao cho A, M, N thẳng hàng.

**ĐS:** 1) $x + 3y + 5z - 13 = 0$ 2) M(0; 1; −1), N(0; 1; 1)

**Bài 42:** Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4t \end{cases}\ ;\ \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $\Delta_1$ và song song $\Delta_2$

2) Cho điểm M(2; 1; 4). Tìm toạ độ điểm H thuộc $\Delta_2$ sao cho đoạn MH có độ dài bé nhất.

**ĐS:** 1) $2x - z = 0$ 2) H(2; 3; 3)

**Bài 43**: Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua đường thẳng (d): $\begin{cases} x = -t \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$ và tạo với mặt phẳng (P): $2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc nhỏ nhất.

**ĐS:** $x + y - z + 3 = 0$.

**Bài 44**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

1) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d.

2) Viết phương trình mặt phẳng ($\alpha$) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến ($\alpha$) lớn nhất.

**ĐS:** 1) H(3; 1; 4) 2) $x - 4y + z - 3 = 0$.

**Bài 45:** Cho I (2, −1, 1) và d: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$. Lập phương trình mặt phẳng $\alpha$ qua I và vuông góc d.

**ĐS:** $2x + y - 2z - 1 = 0$.

**Bài 46:** Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng: d : $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ và song song d' : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

**HD:** VTPT $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{u'}]$.

**Bài 47**:Lập phương trình mặt phẳng chứa 2 đường thẳng:

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = -t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

**HD:** 2 đường thẳng song song.

**Bài 48**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm H(1; 2; –1) và đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$ Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm H, cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α): $x + y - z + 3 = 0$

**ĐS:** $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$

**Bài 49**: Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm A(1; 4; 2), B(–1; 2; 4) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$

1) Viết phương trình đường d đi qua trọng tâm của tam giác OAB và vuông góc với (OAB).
2) Tìm điểm M thuộc Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

**ĐS:** 1) d: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ 2) (–1; 0; 4)

**Bài 50**: Trong không gian Oxy, cho (P): $x + y + z - 4 = 0$ và 3 điểm A(3; 0; 0), B(0; –6; 0), C(0; 0; 6). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ là giao tuyến của (P) và mặt phẳng (ABC).

**ĐS:** (Δ): $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - 3t \quad , t \in R \end{cases}$

**Bài 51:** Lập phương trình tham số đường thẳng đi qua I (3, 1, –5) và J (2, 1, –1).

**HD:** VTCP $\overrightarrow{IJ}$.

**Bài 52:** Lập phương trình tham số đường thẳng qua A (–2, 4, 3) ,vuông góc (P): $2x - 3y + 6z + 19 = 0$

**HD:** VTCP (2; –3; 6)

ABC

**Bài 53:** Lập phương trình chính tắc qua E (3, 4, 1) và song song với đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = \quad\ \ 3t \end{cases}$

**ĐS:** $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-4} = \dfrac{z-1}{3}$

**Bài 54:** Lập phương trình tham số đường thẳng đi qua trọng tâm và vuông góc mặt phẳng tam giác A (1, 3, 2), B (1, 2, 1), C (1, 1, 3).

**HD:** VTCP (1; 0; 0)

**Bài 55:** Lập phương trình đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng:

$x - 2y + 3z - 4 = 0$ và $3x + 2y - 5z - 4 = 0$

**HD:** VTCP (2; 7; 4).

**Bài 56:** Lập phương trình giao tuyến của (α): $3x - y + 2z - 1 = 0$ với (P): $x + y + z + 7 = 0$

**HD:** Tìm 2 điểm chung hoặc 1 điểm chung và VTCP

**Bài 57:** Lập phương trình tổng quát của đường cao AH của tam giác A (5, 0, 0), B (–1, 2, 3), C (–2, 1, 1).

**HD:** tìm chân vuông góc AH.

**Bài 58:** Lập phương trình hình chiếu của $d: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ lên mp(Oxy) và tính góc của d với (Oyz).

**HD:** hình chiếu của A(6; 3; 1) lên (Oxy) là A'(6; 3; 0)

**Bài 59:** Lập phương trình hình chiếu của $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-5}{3}$ lên mp(Oyz)

**HD:** tìm hình chiếu của VTCP

**Bài 60:** Lập phương trình hình chiếu của $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ lên mặt phẳng (P): $6x + 3y - 2z + 3 = 0$.

**HD:** tìm giao điểm của d với (P)

**Bài 61:** Lập phương trình hình chiếu của $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ lên mặt phẳng (P): $3x - y - z + 1 = 0$

**HD:** tìm giao điểm của d với (P)

**Bài 62:** Cho tứ diện A(1; 2; –3), B(5; 2; 1), C(0; 1; 2), D(3; 2; 6). Tính diện tích tam giác ABC và lập phương trình hình chiếu của AB lên (BCD).

**HD:** tìm hình chiếu của A lên (BCD)

**Bài 63:** Cho 2 điểm M(3; 2; 9), N(2; 0; –1). Lập phương trình hình chiếu của đường thẳng MN lên (P): $2x + 3y - 4z + 1 = 0$

**HD:** tìm hình chiếu MN lên (P)

**Bài 64:** Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \text{ qua điểm } I\ (1, 0, -2)$$

**HD:** d, d' song song

**Bài 65:** Lập phương trình đường thẳng đối xứng của đường thẳng d:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3} \text{ qua (Oxy).}$$

**HD:** tìm giao điểm của d với (Oxy).

**Bài 66:** Lập phương trình đường thẳng đối xứng của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 5t \end{cases} \quad \text{qua (P): } x - y + 2z - 3 = 0$$

**HD:** tìm giao điểm của d với (P).

**Bài 67:** Lập phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 5t \end{cases}$$

**HD:** Gọi đoạn vuông góc chung là AB với A, B thuộc d, d' dạng tham số.

**Bài 68:** Cho tứ diện A(3; 1; 2), B(0; 2; 7), C(0; 1; 5), D(1; −2; 4).

Lập phương trình đường vuông góc chung và tính góc của AC, BD

**HD:** Lập phương trình tham số của AC, BD.

**Bài 69:** Lập phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và } d': \frac{x+2}{1} = \frac{y-12}{-2} = \frac{z-5}{2}$$

**HD:** Lập phương trình tham số của d'

**Bài 70:** Lập phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ và } d': \frac{x+2}{1} = \frac{y-12}{-2} = \frac{z-5}{2}$$

**HD:** Lập phương trình tham số của d, d'

**Bài 71:** Lập phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng

(P): $3x - y + 2z + 1 = 0$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

**HD:** đường thẳng qua giao điểm của d với (P).

ABC

**Bài 72:** Lập phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P): $2x + 2y + 2z - 1 = 0$. và cắt 2 đường thẳng d : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$, d' : $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 3 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

**HD:** đường thẳng qua 2 giao điểm của d, d' với (P)

**Bài 73:** Cho tứ diện đều ABCD có A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1). Tìm đỉnh D và phương trình đường cao CH của tứ diện.

**HD:** tam giác ABC đều có tâm $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ và dùng khoảng cách.

**Bài 74:** Tìm giao điểm của 2 đường thẳng là hình chiếu của 2 đường thẳng $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$; $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{5}$ lên Oxy.

**HD:** hình chiếu của điểm, vectơ có toạ độ (x; y; z) lên Oxy là (x; y; 0).

**Bài 75:** Tìm quỹ tích các điểm M cách đều 3 điểm A(1, 1, 1), B(–1, 1, 0), C(2, –3, 2).

**HD:** đường thẳng cần tìm là giao tuyến của 2 mặt trung trực của AB, AC.

**Bài 76**: Lập phương trình hình chiếu vuông góc của d: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$ lên mặt phẳng Oxy.

**ĐS:** d': $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

**Bài 77**: Cho đường thẳng d: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 10 = 0$. Lập phương trình hình chiếu d' của d lên mặt phẳng (P).

**ĐS:** d': $\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -2 - t \\ z = 6 \end{cases}$.

**Bài 78**: Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình: $\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}$, $2x - 3y + z = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ là hình chiếu của d trên mặt phẳng (P).

**ĐS:** Δ: $\begin{cases} x = -\frac{28}{3} + 22t \\ y = -\frac{32}{3} + 23t \\ z = -\frac{40}{3} + 25t \end{cases}$.

ABC

**Bài 79**: Trong không gian Oxyz cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, biết S(3; 2; 4), B(1; 2; 3), D(3; 0; 3). Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SD.

**ĐS:** $\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$

**Bài 80**: Cho hai đường thẳng d: $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+6}{2}$, d': $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng (P): $2x-y-z+3=0$

Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với (P), cắt cả d và d'.

**ĐS:** Δ: $\begin{cases} x=\frac{49}{8}-\frac{17}{4}t \\ y=t \\ z=-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}t \end{cases}$

**Bài 81**: Cho M(1; 2; –1), đường thẳng d: $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P): $2x+y-z+1=0$. Viết phương trình của đường thẳng Δ qua M, cắt d và song song với mặt phẳng (P).

**ĐS:** Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-9}=\frac{z+1}{-5}$

**Bài 82**: Cho hai đường thẳng d: $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{-3}$ ; d': $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x+y-2z=0$

Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và cắt hai đường thẳng d và d'.

**ĐS:** Δ: $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t. \\ z=t \end{cases}$

**Bài 83**: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và 2 đường thẳng $d_1$: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$ ; $d_2$: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$

1) Tìm A' đối xứng của A qua đường thẳng $d_1$.

2) Viết phương trình dường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với $d_1$ và cắt $d_2$.

**ĐS:** 1) A'(–1; –4; 1) 2) Δ: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$

**Bài 84**: Trong không gian Oxyz cho điểm A(–4; –2; 4) và đường thẳng d: $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$ Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt và vuông góc với d.

**ĐS:** $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$

**Bài 85:** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng và mặt phẳng d: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ ; (P): $2x + y - 2z + 9 = 0$

1) Tìm điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến (P) bằng 2.
2) Tìm giao điểm A của d và (P). Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua A và vuông góc d.

**ĐS:** 1) I(–3; 5; 7) I(3; –7; 1) 2) A(0; –1; 4), $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4 + t \end{cases}$

**Bài 86**: Lập PT mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = -2t \end{cases}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng

$(P_1)$: $x + 2y + 2z + 3 = 0$ và $(P_2)$: $x + 2y + 2z + 7 = 0$

**ĐS:** (S): $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

**Bài 87:** Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $x + z = 2$. Chứng minh (P) cắt (S). Xác định toạ độ tâm và tính bán kính đường tròn giao tuyến (C) của (P) và (S).

**ĐS:** I(1; 0; 1), $r = \sqrt{2}$

**Bài 88**: Trong không gian Oxyz, cho điểm I(1; 3; 5) và đường thẳng (Δ): $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{7}{-1}$ Lập phương trình mặt cầu tâm I và cắt đường thẳng (Δ) tại hai điểm K và L sao cho KL = 12.

**ĐS:** $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 50$.

**Bài 89**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hình chóp tứ giác đều S. ABCD, biết các đỉnh S(3; 2; 4), A(1; 2; 3), C(3; 0; 3). Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

**ĐS:** $\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{19}{6}\right)^2 = \frac{25}{12}$

**Bài 90**: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu và mặt phẳng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$;

(P): $2x - y + 2z - 14 = 0$

1) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo đường tròn có bán kính bằng 3.
2) Tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

**ĐS:** 1) $y - 2z = 0$ 2) M (–1; –1; –3)

ABC

**Bài 91:** Tìm tâm và bán kính đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 16 = 0$ với mp(y0z).

**ĐS:** $I'(\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; \frac{5}{3})$, $R' = 3$.

**Bài 92:** Tìm tâm và bán kính đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$ với (P): $2x + 2y + z + 1 = 0$

**ĐS:** $I'(0; 1; -2)$, $R' = \sqrt{21}$

**Bài 93:** Lập phương trình mặt cầu tâm I (2, 3, −1) và cắt đường thẳng $d: \begin{cases} x = -14 - t \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}t \\ z = -t \end{cases}$ theo dây AB có độ dài bằng 16.

**HD:** tính theo khoảng cách từ I đến d.

**Bài 94:** Lập phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng $d_1$: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$ làm đường kính.

**HD:** gọi đoạn vuông góc chung là AB với toạ độ A, B theo tham số

**Bài 95:** Cho A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) với a, b, c > 0 thay đổi thoả mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Chứng minh mặt phẳng (ABC) đi qua 1 điểm cố định. Định tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC, chứng minh $r > 1/4$

**HD:** Chứng minh bất đẳng thức bằng phép biến đổi tương đương.

**Bài 96:** Cho Δ: $\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z}{2}$ và Δ': $\frac{x + 5}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z}{1}$

1) Chứng minh rằng Δ chéo với Δ'

2) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ và song song với Δ'

**ĐS:** 2) $3x + 7y - 2z - 8 = 0$.

**Bài 97**: Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$d_1$: $\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 2}{1}$ ; $d_2$: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$

1) Chứng minh 2 đường thẳng chéo nhau.

2) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng: (P): $7x + y - 4z = 0$ và cắt 2 đường thẳng $d_1$, $d_2$.

**ĐS:** 2) $\frac{x - 2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{-4}$

**Bài 98**: Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -4 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = -3 - 6t' \\ y = t' \\ z = 6 + 2t' \end{cases}$

1) Chứng minh d và d' chéo nhau.

2) Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

**ĐS:** 2) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{2}$

**Bài 99**: Cho hai đường thẳng $(\Delta_1)$: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $(\Delta_2)$: $x = t - 1$, $y = -t$, $z = 3t - 2$. Chứng minh rằng $(\Delta_1)$ và $(\Delta_2)$ cùng nằm trên một mặt phẳng và hãy lập phương trình mặt phẳng đó.

**ĐS:** $6x + 9y + z + 8 = 0$.

**Bài 100:** Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2},\ d_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

1) Chứng minh $d_1$ song song với $d_2$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả 2 đường thẳng $d_1$, $d_2$.

2) Mặt phẳng Oxz cắt 2 đường thẳng $d_1$, $d_2$ tại A, B. Tính diện tích tam giác OAB.

**ĐS:** 1) $15x + 11y - 17z - 10 = 0$ 2) $S_{OAB} = 5$.

**Bài 101**: Cho hai đường thẳng chéo nhau (d): $\begin{cases} x = 2 + 36 \\ y = -2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và (d'): $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Hai điểm A, B cố định trên đường thẳng (d) và C di động trên đường thẳng (d'), tìm diện tích nhỏ nhất của tam giác ABC.

**ĐS:** $\min S_{ABC} = \frac{1}{2} m\sqrt{13}$.

**Bài 102**: Cho hai đường thẳng: $(d_1)$: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = -3t \end{cases}$ và $(d_2)$: $\begin{cases} x = t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 4 + 5t' \end{cases}$

1) Xét vị trí tương đối của $d_1$ và $d_2$

2) Gọi B và C lần lượt là điểm đối xứng của A(1; 0; 0) qua $(d_1)$ và $(d_2)$. Tính diện tích tam giác ABC.

**ĐS:** 1) $d_1$ cắt $d_2$ 2) $S_{ABC} = \frac{12\sqrt{41}}{35}$.

**Bài 103**: Cho điểm I(1; 2; −2) và mặt phẳng (P): $2x + 2y + z + 5 = 0$

1) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) và mặt phẳng (P) là đường tròn có chu vi bằng $8\pi$.

2) Chứng minh mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta)$: $\begin{cases} x = t \\ y = -5 + 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

**ĐS:** 1) (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$

ABC

**Bài 104**: Lập PT mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S):

$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ và song song với hai đường thẳng $(d_1)$: $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}$ và $(d_2)$: $x = -7 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = 8$

**ĐS:** $(P_1)$: $4x + 6y + 5z - 103 = 0$ và $(P_2)$: $4x + 6y + 5z + 205 = 0$.

**Bài 105**: Tìm điểm A thuộc mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $2x - 2y + z + 6 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất, đạt giá trị lớn nhất.

**ĐS:** $A_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{-5}{3}\right)$ $A_2\left(\frac{7}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{-1}{3}\right)$

**Bài 106**: Cho hai mặt phẳng song song:

$(P_1)$: $2x - y + 2z - 1 = 0$ $(P_2)$: $2x - y + 2z + 5 = 0$ và điểm $A(-1; 1; 1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi (S) là mặt cầu bất kỳ qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P_1)$ và $(P_2)$

1) Chứng minh rằng bán kính của hình cầu (S) là một hằng số.

2) Gọi I là tâm cầu (S). Chứng minh rằng I thuộc một đường tròn cố định. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

**ĐS:** 1) $R = 1$ 2) $J\left(-\frac{11}{9}; \frac{10}{9}; \frac{7}{9}\right), R_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

**Bài 107:** Chứng minh hai đường thẳng:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{4}$ ; $\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$ đồng phẳng.

Lập phương trình mặt phẳng chứa 2 đường thẳng.

**ĐS:** cắt nhau tại $I(1; -2; 5)$

**Bài 108:**Chứng minh hai đường thẳng sau chéo nhau:

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ ; $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{10} = \frac{z}{-4}$ Tính góc và khoảng cách.

**HD:** dùng điều kiện chéo nhau

**Bài 109:** Chứng minh 2 đường thẳng sau song song: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5-t \end{cases}$ ; $\begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = -3 - t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$

Tính khoảng cách giữa chúng.

**HD:** 2 VTCP cùng phương và vectơ nối 2 điểm trên 2 đường thẳng không cùng phương với VTCP.

**Bài 110:** Lập phương trình đường thẳng qua A(0, 1, 1), vuông góc

d: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{1}$ và cắt $d': \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$

**HD:** lập phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d.

ABC

**Bài 111:**Lập phương trình đường thẳng qua B(–4, –5, 3), cắt 2 đường thẳng :

d: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$ d': $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-5}$

**HD:** đường thẳng có VTCP $[\vec{u}, \vec{u'}]$.

**Bài 112:** Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$, và

Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x - 3y + z = 0$, (Q): $x + y - z + 4 = 0$ Viết phương trình mặt phẳng qua Δ song song với đường thẳng Δ và phương trình đường vuông góc chung của Δ và Δ

**HD:** Δ' có VTCP (1; 1; 2)

**Bài 113:**Cho mặt cầu (S): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$ và đường thẳng d: $x = 3t - 5$ ; $y = 5t - 11$ ; $z = 9 - 4t$. Tìm các giao điểm và khoảng cách từ tâm I của (S) đến d.

**ĐS:** A(4; 4; –3), B(1; –1; 1).

**Bài 114:**Lập phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $8x - 11y + 8z - 30 = 0$, (Q): $x - y - 2z = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$

**ĐS:** $3x - 4y + 2z - 10 = 0$, $2x - 3y + 4z - 10 = 0$

**Bài 115:**Cho đường thẳng và mặt phẳng:

$\Delta : \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$. ($\alpha$): $3x + 5y - z - 2 = 0$

1) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên mặt phẳng ($\alpha$).

2) Cho điểm A (1; 0; –1). Hãy tìm toạ độ điểm A' sao cho mặt phẳng ($\alpha$) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA'

**ĐS:** A'$\left(\dfrac{13}{35}; \dfrac{-4}{7}; \dfrac{-31}{35}\right)$.

**Bài 116:**Cho A ($\sin^3 t$, $\cos^3 t$, $\sqrt{3}\sin t\cos t$), $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ và mặt phẳng:

(P): $x.\sin t + y.\cos t + 2\sin^2 t.\cos^2 t = 0$. Lập phương trình chính tắc đường thẳng OA và tìm giá trị bé nhất của góc giữa OA và (P).

**HD:** đường thẳng OA có VTCP $\vec{u} = (\sin^3 t, \cos^3 t, \sqrt{3}\sin t\cos t)$

**Bài 117:** Cho tứ diện ABCD có A(6; –2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; –1), D(4; 1; 0). Tính thể tích tứ diện và tìm toạ độ tâm, bán kính của đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

**ĐS:** tâm E$\left(\dfrac{12}{5}; \dfrac{-1}{5}; 3\right)$

**Bài 118:** Cho tam giác ABC có C(3, 2, 3), đường cao AH:

$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$ và phân giác trong BD: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$

Tìm chân đường cao AH và tính chu vi.

ABC

**ĐS:** H(2; 3; 3).

**Bài 119:**Trong không gian cho mặt cầu (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.Tìm toạ độ giao điểm của (S) với đường thẳng đi qua hai điểm M(1; 1; 1) và N(2; –1; 5) và viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại các giao điểm đó.

**HD:** lập phương trình MN dạng tham số.

**Bài 120:** Cho hình lập phương ABCD. A B’C’D’ có A (0;0; 0), B(1,0,0), D(0, 1, 0), A’ (0, 0, 1). Gọi M trung điểm AB, N là tâm hình vuông A’B’C’D’. Lập phương trình mặt cầu (S) qua C, D’ M, N và tính dây do đường thẳng CB cắt mặt cầu.

**HD:** gọi phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

**Bài 121:** Xét vị trí tương đối của mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$ với đường thẳng $d : \begin{cases} x = \dfrac{15}{2} - 4t \\ y = \dfrac{15}{2} - 6t \\ z = t \end{cases}$

**ĐS:** cắt nhau

**Bài 122:**Cho họ đường thẳng $d_m$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x - my + z - m = 0$; (Q): $mx + y - mz - 1 = 0$ Lập phương trình hình chiếu $d'_m$ của $d_m$ lên (Oxy). Chứng minh $d'_m$ luôn luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định trong mặt phẳng (Oxy).

**ĐS:** đường tròn tâm O, bán kính R = 1.

**Bài 123**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Điểm M, Q lần lượt là trung điểm của A'D' và BD.

1) Tính khoảng cách giữa các đường thẳng MQ và AC.
2) Tìm góc giữa hai mặt phẳng (MAQ) và (DCC'D').

**HD:** dùng tọa độ

**Bài 124**: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

1) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A_1B$ và $B_1D$.
2) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh $BB_1$, CD, $A_1D_1$. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C_1N$.

**Bài 125**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật AB = a, AD = 2a, SA = 3a vuông góc đáy. Gọi I là trung điểm của CD, tính d(SB, AI)

**ĐS:** $d(SB; AI) = \dfrac{12}{13}a$

**Bài 126:** Tìm giá trị bé nhất của:

$$f(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2} + \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2 + k^2}$$

**HD:** chọn M(x; y; 0) và A(a; b; |c|), B( $\alpha$ ; β , $-|\gamma|$)

ABC

**Bài 127:** Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} 2x + 2x - z + 2m = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z = 0 \end{cases}$

**HD:** đưa về tương giao giữa mặt cầu và mặt phẳng.

**Bài 128:** Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x + 2x - 2z + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 4z + m = 0 \end{cases}$

**HD:** đưa về mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

**Bài 128:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.
Chứng minh A'C vuông góc với mặt phẳng (AB'D') và tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AB'D') và (C'BD).

**ĐS:** $d((AB'D'),(C'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Bài 129:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Chứng minh giao điểm của A'C với mặt phẳng (AB'D') là trọng tâm của tam giác AB'D' và tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (DA'C) và (ABB'A').

**HD:** chọn hệ toạ độ Axyz.

**Bài 130:** Hình lập phương ABCD. A'B'C'D'. Gọi M, N là trung điểm của AD, BB' Chứng minh $MN \perp A'C$ và tính góc hợp MN và AC'

**ĐS:** $\cos(MN, AC') = \frac{\sqrt{2}}{3}$

**Bài 131:** Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N trung điểm AD, BD' Tính đoạn MN và góc giữa AB' và BC' **ĐS:** $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Bài 132:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có 3 kích thước AB = b; AD = d và AA' = c. Tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (AB'D') và tang của góc hợp bởi AB' và BC'

**ĐS:** $d(A',(AB'D')) = \frac{bcd}{\sqrt{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}}$

**Bài 133:** Tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M trung điểm CD.
Chứng minh $AB \perp CD$ và tính góc giữa AB và AM.

**HD:** chọn hệ toạ độ Oxyz với O là tâm của đáy BCD.

**Bài 134:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và mặt bên hợp với đáy góc $60^0$ Gọi I là trung điểm SA. Tính góc và khoảng cách CD với IB.

**HD:** chọn hệ toạ độ Oxyz với O là tâm của đáy.

**Bài 135:** Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi E, F là trung điểm của AB, AD. Tính diện tích tam giác SCF và khoảng cách từ E đến (SCF).

**ĐS:** $d(E,(SCF)) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

**Bài 136:** Cho tứ diện A(1; 2; −3), B(5; 2; 1), C(0; 1; 2), D(3; 2; 6). Tìm điểm M trên đường thẳng CD sao cho MA + MB nhỏ nhất.

ABC

# MỤC LỤC

**Chương I: Khối đa diện và thể tích** ........ 5
§1. Khối đa diện và phép biến hình ........ 5
  *Dạng 1:* Khối đa diện ........ 5
  *Dạng 2:* Phép dời hình ........ 8
  *Dạng 3:* Khối đa diện đều và phép vị tự ........ 19
§2. Thể tích khối đa diện ........ 30
  *Dạng 1:* Khối lăng trụ - Khối hộp ........ 30
  *Dạng 2:* Khối chóp tam giác - Tứ diện ........ 41
  *Dạng 3:* Khối đa diện - Khối chóp ........ 57
  *Dạng 4:* Ti thể tích ........ 67
**Chương II: Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón** ........ 89
§1. Mặt cầu, khối cầu ........ 89
  *Dạng 1:* Mặt cầu, khối cầu ........ 90
  *Dạng 2:* Mặt cầu nội, ngoại tiếp ........ 101
§2. Mặt trụ - Khối trụ ........ 124
  *Dạng 1:* Mặt trụ Hình trụ ........ 124
  *Dạng 2:* Nội - Ngoại tiếp hình trụ ........ 129
§3. Mặt nón - Khối nón ........ 136
  *Dạng 1:* Mặt nón - Hình nón ........ 136
  *Dạng 2:* Nội - Ngoại tiếp hình nón ........ 144
**Chương III: Phương pháp toạ độ trong không gian** ........ 154
§1. Hệ toạ độ không gian ........ 154
  *Dạng 1:* Toạ độ điểm, vectơ ........ 155
  *Dạng 2:* Góc, khoảng cách, diện tích, thể tích ........ 166
  *Dạng 3:* Mặt cầu ........ 176
§2. Phương trình mặt phẳng ........ 190
  *Dạng 1:* Lập phương trình mặt phẳng ........ 191
  *Dạng 2 :* Tương giao – Vị trí tương đối ........ 203
  *Dạng 3:* Góc và khoảng cách ........ 212
  *Dạng 4:* Mặt phẳng và mặt cầu ........ 219
§3. Phương trình đường thẳng ........ 232
  *Dạng 1:* Lập phương trình đường thẳng ........ 233
  *Dạng 2:* Lập phương trình mặt phẳng, mặt cầu ........ 249
  *Dạng 3:* Vị trí tương đối, tương giao ........ 257
  *Dạng 4:* Góc và khoảng cách ........ 269
  *Dạng 5:* Toán tổng hợp ........ 286

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

***

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

*Giám đốc* PHÙNG QUỐC BẢO
*Tổng biên tập* PHẠM THỊ TRÂM

*Biên tập nội dung*
BÍCH HẠNH
*Sửa bài*
ANH THƯ
*Chế bản*
CÔNG TI ANPHA
*Trình bày bìa*
SƠN KỲ
*Đối tác liên kết xuất bản*
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC 12**
Mã số: 1L-41ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm in tại Công ti TNHH In Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 134 - 2010/CXB/23 - 14ĐHQGHN, ngày 01/2/2010
Quyết định xuất bản số: 41LK -TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.

Công ti
Sách - Thiết bị
Giáo dục ANPHA
50 Nguyễn Văn Săng
P.TSN, Q.Tân Phú
ĐT: 08.62676463

## SÁCH CÓ BÁN TẠI

*Tp. Hà Nội:*

**Công ti TNHH Trình Dậu**
98 Lê Thanh Nghị
ĐT: 04.38680092

**Công ti Quảng Lợi**
32 Gia Ngư. ĐT: 04.38246605

**Công ti Việt Kim Long**
59 Nguyễn Khoái, Q.HBT
ĐT: 04.39844721

**Nhà sách Bình Thủy**
67 Nguyễn Khoái, Q.HBT
ĐT: 04.39845439

**Nhà sách Ngọc Hòa**
50 Lý Thường Kiệt, Q.HK
ĐT: 04.38258410

**Nhà sách Dương Nguyệt**
42E Lý Thường Kiệt, Q.HK
ĐT: 04.38264906

*Tp. Đà Nẵng*

**Nhà sách Phương**
4 Lý Thái Tổ. ĐT: 3823421

**Nhà sách Lam Châu**
129 Phan Chu Trinh
ĐT: 0511.3821317

*Tp.Hồ Chí Minh:*

**Trung tâm Sách Giáo dục Anpha.** 225C Ng. Tri Phương, P.9, Q.5. ĐT: 08.38547464

**Công ti Thái Khuê**
48 Nguyễn Thị Minh Khai, Q.3
ĐT: 08.38244422

**CH Sách Thiết bị giáo dục**
10A - 10B Đinh Tiên Hoàng, Q.1. ĐT: 08.38228300

**Nhà sách 142 Trần Huy Liệu**
ĐT: 08.38458295

Và hệ thống các siêu thị sách của công ti **Phương Nam, Fahasa, Văn hóa Du lịch Gia Lai...** trên toàn quốc.

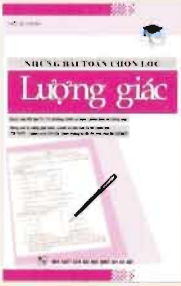
DẠY TỐT HỌC TỐT

ALPHA BOOK COMPANY

# TRUNG TÂM SÁCH GIÁO DỤC ALPHA

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM. ĐT: 08.62676463

*Mời các bạn tìm đọc:*

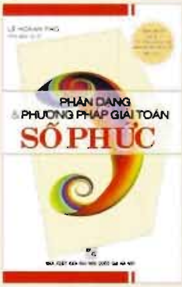

NHỮNG BÀI TOÁN CHỌN LỌC
Lượng giác

PHÂN DẠNG & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
Hình học 12

PHÂN DẠNG & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
Giải tích 12

Giải tích 12
Trọng tâm kiến thức các dạng toán cơ bản thường gặp trong các kì thi

NHỮNG BÀI TOÁN CHỌN LỌC
Chứng minh bất đẳng thức & tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất


PHÂN DẠNG & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
SỐ PHỨC

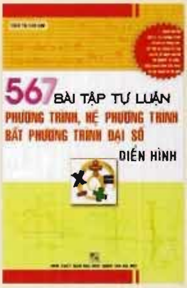
PHÂN DẠNG & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

500 BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH
phương trình, bất phương trình
hệ phương trình,
hệ bất phương trình mũ logarit

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
KHẢO SÁT HÀM SỐ

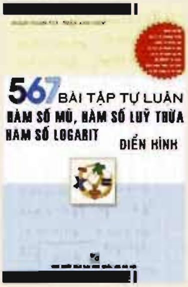
Trọng tâm kiến thức & phương pháp giải Toán

Trọng tâm kiến thức & phương pháp giải Toán


567 BÀI TẬP TỰ LUẬN
PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH
BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ
ĐIỂN HÌNH

DÙNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH
ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT ĐẲNG THỨC...

1 2 3
Bài tập chọn lọc về khối không gian giải bằng phương pháp Hình học


567 BÀI TẬP TỰ LUẬN
HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LUỸ THỪA
HÀM SỐ LOGARIT
ĐIỂN HÌNH

567 BÀI TẬP TỰ LUẬN
LƯỢNG GIÁC
ĐIỂN HÌNH

8 936039 374107

alphabookcenter@yahoo.com
Sách có dán tem chống giả ở bìa 1

Giá: 50.500đ